

Exercice 1

a) Négation: $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, n \leq x$

Fausse: En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$, prenons $x = n+1$

Alors $x \geq n$ et donc la négation de la proposition est toujours vraie.

b) Négation: $\exists x \in \mathbb{R}, ((x^2 \geq x) \text{ et } x \notin [0,1])$

$(x^2 \geq x) \Rightarrow x \in [0,1]$ ——— ou $(x^2 < x \text{ et } x \in [0,1])$

Fausse: Prenons $x=2$.

On a $x^2 = 4 \geq 2 = x$, pourtant $x \notin [0,1]$.

On a donc exhibé un contre-exemple.

c) Négation: $\exists x \in \mathbb{R}, (x^2 = 4) \text{ et } (x \neq 2)$.

Fausse: Prenons $x = -2$. Alors

$x^2 = 4$ pourtant $x \neq 2$.

On a donc exhibé un contre-exemple.

③ Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$P(n) : "|\sin(nx)| \leq n |\sin(x)|"$$

Initialisation immédiate pour $n=1$,
par égalité des deux membres.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé. Supposons $P(n)$,

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)x)| &= |\sin(nx + x)| \\ &= |\sin(nx) \cos(x) + \sin(x) \cos(nx)| \\ &\leq \underbrace{|\sin(nx)| |\cos(x)|}_{\leq 1} + |\sin(x)| \underbrace{|\cos(nx)|}_{\text{par inégalité triangulaire}} \leq 1 \\ &\stackrel{\text{H.R.}}{\leq} n |\sin(x)| \times 1 + |\sin(x)| \times 1 \end{aligned}$$

$$= (n+1) |\sin(x)|.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Donc, par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

④ On a d'abord $u_0 = 1 \leq 2^0 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé. Supposons que pour tout $k \in [0, n]$, que $u_k \leq 2^k$.

$$\text{Alors } u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1 \leq 2^{n+1}$$

$$\text{Donc } u_{n+1} \leq 2^{n+1}.$$

Par récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_n \leq 2^n$.

⑤ Voir cours

⑥ Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, par l'absurde.

Alors $\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, avec $p \wedge q = 1$,

tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, c'est à dire

$$2q^2 = p^2.$$

Donc p^2 est pair et d'après ⑤
 p aussi.

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $p = 2k$.

On obtient donc $2q^2 = 4k^2$,

d'où $q^2 = 2k^2$.

De même q^2 est pair et donc q est pair.

Par conséquent, $p \wedge q \neq 1$ car $2 \mid p$ et $2 \mid q$

Absurde.

Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

⑦ Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a + b\sqrt{2} = 0$

$\triangle a = b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0.$

Si $b \neq 0$, alors $\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Absurde

Donc $b = 0$, d'où $a + 0 \times \sqrt{2} = a = 0$.

⑧ Soient $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ tq

$$m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (m - p) + (n - q)\sqrt{2} = 0$$

$$\stackrel{⑦}{\Leftrightarrow} m - p = 0 = n - q$$

$$\Leftrightarrow m = p \text{ et } n = q$$

Ce qui montre le résultat directement par équivalence.

⑨ Si $x \leq -2$: (E) devient

$$5 - x + 1 - x = -x - 2, \text{ c'est à dire}$$

$$8 = x, \text{ impossible, car } 8 \not\leq -2$$

si $-2 < x \leq 1$: (E) devient

$$5-x + 1-x = x+2, \text{ c'est à dire}$$

$$4 = 3x, \text{ i.e., } x = \frac{4}{3}.$$

Impossible car $\frac{4}{3} > 1$

si $1 < x \leq 5$: (E) devient

$$5-x + x-1 = x+2, \text{ c'est à dire}$$

$$2 = x \text{ et } x \in]1, 5], \text{ donc}$$

x est solution

si $x > 5$: (E) devient

$$x-5 + x-1 = x+2, \text{ c'est à dire}$$

$$x = 8 \text{ et } 8 > 5 \text{ donc}$$

x est solution

$$\textcircled{10} (F) \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x \quad (2\pi)$$

$$\text{ou}$$
$$2x = x - \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \left[\frac{2\pi}{3} \right]$$

$$\text{ou}$$
$$x = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \mathbb{Z} \right) \cup \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi \mathbb{Z} \right)$$

redondant.

Sur $[0, 2\pi[$, les solutions sont

$$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}.$$

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{2}x)}{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2)} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{2}x)}{x(-\sqrt{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2} - 1)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - e^{2x})}{x} = \frac{-2}{1} = -2 \quad \text{par limite}$$

dérivation

$$\rightarrow \frac{-2e^{2x}}{2 - e^{2x}}$$

du taux
d'accroissement.

Exercice 2

[Lien vers vidéo](#)[Vidéo de correction](#)

① La formule $\cos^2 + \sin^2 = 1$ donne les valeurs de $\sin$ au signe près.

On obtient le signe en regardant la position de l'angle considéré.

② On a $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8} \times 2\right)$.

Donc $\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$, c'est à dire

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2} + 2}{4}$$

Or $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2}$

③ a) $\cos(0) = 1$, on prend $a_0 = 1$,

et $\cos(\pi) = 1 \times \cos(\pi)$, on prend $a_0 = 0$
et $a_1 = 1$

Donc $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont vérifiées.

b) Soient $d \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$. On a

$$\cos((n+1)d) = \cos(nd + d)$$

$$= \cos(nd) \cos(d) - \sin(d) \sin(nd) \quad (*)$$

$$\begin{aligned}\cos((n-1)d) &= \cos(nd - d) \\ &= \cos(nd) \cos(d) + \sin(d) \sin(nd) \quad (*_2)\end{aligned}$$

En sommant $(*_1)$ et $(*_2)$ on obtient

$$\cos((n+1)d) + \cos((n-1)d) = 2 \cos(nd) \cos(d)$$

D'où le résultat.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, fixé. Supposons $\mathcal{H}_{n-1}$ et $\mathcal{H}_n$.

On a alors

$$\cos((n+1)d) = 2 \cos(nd) \cos(d) - \cos((n-1)d)$$

Donc $\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$

tels que $\cos(nd) = \sum_{k=0}^n a_k \cos^k(d)$

et $\cos((n-1)d) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cos^k(d)$

Donc

$$\cos((n+1)d) = \sum_{k=0}^n 2a_k \cos^{k+1}(d) - \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cos^k(d)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} (2a_{k-1} - b_k) \cos^k(d)$$

en posant $b_n = 0 = b_{n+1}$

D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

Donc par récurrence double, $\sin$ et $\cos$ sont périodiques
pour tout $n \in \mathbb{N}$.

④ On a

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{5} - \pi\right) \\ &= -\cos(2\theta).\end{aligned}$$

⑤ Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(3t) &= \cos(2t + t) \\ &= \cos(2t) \cos(t) - \sin(2t) \sin(t) \\ &= (2\cos^2(t) - 1) \cos(t) - 2\sin(t) \cos(t) \sin(t) \\ &\stackrel{\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1}{=} 2\cos^3(t) - \cos(t) - 2\cos(t) + 2\cos^3(t) \\ &= 4\cos^3(t) - 3\cos(t).\end{aligned}$$

⑥ De plus,

$$\begin{aligned}4c^3 - 3c &= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \\ &= \cos(3\theta) = -\cos(2\theta) \\ &= -(2\cos^2(\theta) - 1) \\ &= -2c^2 + 1\end{aligned}$$

Donc c est solution de l'équation

⑦ On a , pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$4x^3 + 2x^2 - 3x - 1$$

$$= (x+1)(4x^2 - 2x - 1)$$

Le discriminant de $4x^2 - 2x - 1$ est

$$(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 20 = (2\sqrt{5})^2$$

Donc on obtient la factorisation

$$4x^3 + 2x^2 - 3x - 1$$

$$= 4(x+1) \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$$

⑧ $\frac{\pi}{5} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(\frac{\pi}{5})$ est positif.

La seule racine qui peut correspondre

est donc $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$