

DS 1

du 16/09/2025

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.

CONSIGNES DE RÉDACTION. Ce devoir évalue autant *la façon dont vous écrivez* que vos résultats. J'attends en particulier :

- que toute lettre introduite le soit explicitement : « Soit $x \in \mathbb{R}$. », « Posons $n = \dots$ » ;
- que chaque étape soit reliée à la précédente par un mot de liaison (*donc, or, ainsi, par conséquent*) ;
- que les résultats finaux soient encadrés, et les ensembles de solutions toujours donnés.

Faites attention au soin apporté à votre présentation et à la justesse de votre rédaction.
Durée : 2 heures.

EXERCICE 1: LOGIQUE, RAISONNEMENTS, CALCULS ET RÉDACTION

PARTIE A - VRAI OU FAUX

- ① Pour chacune des assertions suivantes, donner la négation.
- (a) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, n > x$. (b) $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 \geq x \Leftrightarrow x \in [0, 1])$. (c) $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 = 4 \Rightarrow x = 2)$.
- ② Pour chaque assertion, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la démontrer ; si elle est fausse, en donner un contre-exemple explicite.

PARTIE B - RÉCURRENCES

- ③ Soit x un réel. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |\sin(nx)| \leq n|\sin x|$.
- ④ On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n \end{cases}$$
 Montrer par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n$.

PARTIE C - ABSURDE OU CONTRAPOSÉE ?

Les questions de cette partie ne sont pas indépendantes.

- ⑤ Montrer que n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.
- ⑥ En déduire que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
On pourra procéder par l'absurde, en supposant que $\sqrt{2}$ est une fraction rationnelle irréductible.
- ⑦ Démontrer alors que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = b = 0$.
- ⑧ En déduire que si m, n, p et q sont des entiers relatifs, alors $m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \Leftrightarrow (m = p \text{ et } n = q)$.

PARTIE D - EQUATIONS ET INÉQUATIONS

- ⑨ Résoudre dans $\mathbb{R}$, $|x - 5| + |x - 1| = |x + 2|$.
- ⑩ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x) = \sin(x)$, puis donner l'ensemble de ses solutions appartenant à $[0, 2\pi[$.

PARTIE E - LIMITES

- ⑪ Déterminer, en justifiant, les limites suivantes.

Ⓐ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}.$

Ⓑ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x \right).$

Ⓒ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - e^{2x})}{x}.$

EXERCICE 2: CALCUL DE VALEURS SPÉCIALES TRIGONOMÉTRIQUES

On peut avoir besoin de (ou juste s'amuser à) calculer les valeurs exactes de certains angles quotient de π .

PARTIE A - PREMIÈRES VALEURS ET RÉDUCTION DU PROBLÈME

- ① Expliquer pourquoi calculer les valeurs de "cos" est suffisant, c'est à dire, comment en déduire les "sin" ?
- ② Calculer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ à partir de celle de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
De cette manière on peut calculer toutes les valeurs de $\cos(\theta/n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\cos(\theta)$ est connu.
- ③ Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'assertion $\mathcal{H}(n)$ suivante :

$$\exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \cos(n\alpha) = a_0 + a_1 \cos(\alpha) + a_2 \cos^2(\alpha) + \dots + a_n \cos^n(\alpha) = \sum_{k=0}^n a_k \cos^k(\alpha).$$

- Ⓐ Vérifier $\mathcal{H}(0)$ et $\mathcal{H}(1)$.
- Ⓑ Montrer que, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, $\cos((n+1)\alpha) = 2\cos(\alpha)\cos(n\alpha) - \cos((n-1)\alpha)$.
- Ⓒ En déduire, par une récurrence double, que $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De cette manière on peut calculer toutes les valeurs de $\cos(k\theta/n)$, pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, si $\cos(\theta/n)$ est connu.

Les seules valeurs difficiles à obtenir sont donc celles de la forme $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$, où n est premier.

PARTIE B - LA VALEUR EXACTE DE $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

On pose $\theta = \frac{\pi}{5}$ et $c = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

- ④ Justifier que $3\theta = \pi - 2\theta$, puis en déduire que $\cos(3\theta) = -\cos(2\theta)$.
- ⑤ Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$.
- ⑥ En déduire que c est solution de l'équation $4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$.
- ⑦ Factoriser la fonction polynomiale de la question précédente.
On pourra utiliser une racine évidente.
- ⑧ En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
On justifiera soigneusement le choix de la racine.

Contrairement à $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, le nombre $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ ne s'exprime pas à l'aide de racines carrées emboîtées : c'est la raison pour laquelle l'heptagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas. On ne cherchera donc pas à « résoudre » P .

Fin de l'énoncé.