

DS 2 : Autour du cours du 30/09/2026

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)} =$ 0	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 5x + 2} + x =$ 5/2
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)e^x}{x^2 - 1} =$ +∞	$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 4x + 4} =$ +∞

Déterminer selon la valeur de $m \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases}$.

Après l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$ on obtient le système équivalent $\begin{cases} x + my = -3 \\ (4 - m^2)y = 6 + 3m \end{cases}$ Ainsi on distingue les cas suivants :

- Si $m \notin \{-2, 2\}$ on obtient une unique solution par remontée.
- Si $m = 2$ la dernière ligne est $0 = 12$ et il n'y a aucune solution.
- Si $m = -2$ la dernière ligne est $0 = 0$ donc le système équivaut à $x - 2y = -3$ qui a une infinité de solutions.

① Donner la formule de $\sin(2x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

② Résoudre l'inéquation $\cos^2 x \leq \sin(2x)$.

① Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.

② Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x \leq \sin(2x) \iff \cos x (\cos x - 2 \sin x) \leq 0$.

On résout l'équation, qui donne les solutions $x = \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou $x = \arctan(1/2)[\pi]$.

En remarquant que $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leq 0$ et $\cos^2(0) - \sin(0) = 1 \geq 0$,
on obtient l'ensemble des solutions

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\arctan \frac{1}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right].$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes $S_0 = \sum_{k=0}^n k(k-n)$ et $S_1 = \sum_{k=1}^n x^{2k}$.

$$S_0 = \sum_{k=0}^n k^2 - n \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n-n^3}{6}$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^n (x^2)^k = \begin{cases} \frac{x^2 - x^{2(n+1)}}{1-x^2} & \text{si } x \notin \{-1, 1\} \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer la somme $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i^2}{j(j+1)}$.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i^2}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^j i^2 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} \cdot \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} = \sum_{j=1}^n \frac{2j+1}{6} = \frac{n(n+1)+n}{6} = \frac{n(n+2)}{6}.$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad & \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_i b_j)^2 + (a_j b_i)^2 - 2 a_i a_j b_i b_j \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^2 b_j^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_j^2 b_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \left(a_i b_i \sum_{j=1}^n a_j b_j \right) \\
 &= 2 \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right) - \left(\sum_{j=1}^n a_j b_j \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \right] \\
 &= 2 \left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n b_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

$\textcircled{2}$ Par positivité de $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$, comme somme de termes positifs, on a

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n b_k^2 \right) \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2$$

d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz, par passage à la racine carrée, fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad & (1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \\
 \text{et} \quad & (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.
 \end{aligned}$$

④ On a $((1+x)^n)^2 = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right)^2$

les coefficients devant x^n sont obtenus en multipliant les coefficients devant x^k et x^{n-k} pour $k \in [0, n]$, c'est à dire :

$$\begin{aligned} & \binom{n}{0} \binom{n}{n} + \binom{n}{1} \binom{n}{n-1} + \dots + \binom{n}{n} \binom{n}{0} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \end{aligned}$$

⑤ Par identification polynomiale des coefficients devant x^n , on a

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

⑥ $2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \binom{2n}{n} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} \binom{2n}{k}$

or pour tout $k \in [0, 2n] \setminus \{n\}$, $\binom{2n}{k} \geq 0$

Donc $\binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$

⑦ Posons pour $k \in [0, n]$, $b_k = \binom{n}{k}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k \binom{n}{k} \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \right)^{1/2}$$

ce qui revient à , d'après (5)

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k \binom{n}{k} \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \binom{2n}{n}^{1/2}$$

i.e. , d'après (6)

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k \binom{n}{k} \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} 2^n$$

(8) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tq

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k \binom{n}{k} \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \lambda^n$$

Cas d'égalité d'une inéquation:

On peut choisir des valeurs pour lesquelles l'inégalité devient une égalité.

Posons $a_k = \binom{n}{k}$, pour tout $k \in [0, n]$.

On obtient

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \leq \lambda^n \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \right)^{1/2}$$

D'où $\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \right)^{1/2} \leq \lambda^n$, car $\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \right) \neq 0$

$\left(\binom{2n}{n} \right)^{1/2}$ d'après (5)

On peut démontrer que $\binom{2n}{n}$ est le plus grand des coefficients $\binom{2n}{k}$ pour $k \in [0, 2n]$

Par exemple, $u_k = \binom{2n}{k}$, est le terme d'une suite croissante jusqu'à n , puis décroissante.

Donc $4^n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{n}$

$= \binom{2n+1}{n} \binom{2n}{n}$

$\leq \binom{2n+1}{n} \lambda^{2n}$

Donc $\frac{\lambda^2}{4} \geq \binom{2n+1}{n}^{-1/n}$

$= \exp\left(\frac{\ln(\binom{2n+1}{n})}{n}\right) \geq 1$

qui tend vers 1 par croissances comparées donc

$\lambda^2 \geq 4$ d'où $\lambda \geq 2$

$$① \quad S_{0,0} = \sum_{k=0}^0 (-1)^k \binom{0}{k} k^0 = \underline{1}$$

$$S_{n,0} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^0 = (1-1)^n = \underline{0}$$

$$② \quad a) \quad S_{0,1} = \sum_{k=0}^0 (-1)^k \binom{0}{k} k = \underline{0}$$

$$S_{1,1} = \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} k = \underline{-1}$$

③ b) pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n (-x)^k \binom{n}{k} = (1-x)^n$$

④ c) En dérivant membre à membre pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{k=0}^n (-x)^{k-1} \binom{n}{k} k = -n(1-x)^{n-1}$$

⑤ d) En remplaçant x par 1, puis en multipliant par -1 , on a, pour tout $n > 1$,

$$S_{n,1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k = n (1-1)^{n-1} = 0$$

③ a Soient $p \in \mathbb{N}$ et $n \geq p+1$.

$$\begin{aligned} S_{n,p+1} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^{p+1} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k} k^p \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k n \binom{n-1}{k-1} k^p, \text{ par la formule du pion.} \\ &\quad \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \right) \\ &\quad \downarrow \\ &= n \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} \right) k^p \\ &= n (S_{n,p} - S_{n-1,p}) \end{aligned}$$

✓ car $\binom{n-1}{n} = 0$

⑥ Soit $P(p)$: "pour tout $n > p$, $S_{n,p} = 0$ ".

$P(0)$ revient à ①.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $P(p)$. $\forall n > p+1$

$$\begin{aligned} \text{Or } S_{n,p+1} &= n (S_{n,p} - S_{n-1,p}) \\ &= n \left(\underbrace{0}_{n > p} - \underbrace{0}_{n-1 > p} \right) = 0 \end{aligned}$$

Donc par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
 $P(p)$ est vraie.

④ On a $S_{0,0} = 1 = (-1)^0 0!$ d'après ①

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $S_{n,n} = (-1)^n n!$.

$$\begin{aligned} S_{n+1,n+1} &= (n+1) (S_{n+1,n} - S_{n,n}) \\ &= (n+1) (0 - (-1)^n n!) \text{ d'après ③} \\ &= \underline{(-1)^{n+1} (n+1)!} \end{aligned}$$

Donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $S_{n,n} = (-1)^n n!$

⑤ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n!} S_{n,n+1} \stackrel{\text{③}}{=} \frac{(-1)^n}{n!} \times n (S_{n,n} - S_{n-1,n}) \\ &= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (-1)^n n! + \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} S_{n-1,n} \\ &= n + u_{n-1} \end{aligned}$$

Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^n k + u_0$$

pour $n=0$, comme $\sum_{k=1}^0 k = 0$, on a le résultat voulu.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n = \sum_{k=1}^n k + u_0$

$$\begin{aligned} \text{Alors } u_{n+1} &= (n+1) + u_n = (n+1) + \sum_{k=1}^n k + u_0 \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k + u_0 \end{aligned}$$

Donc, par récurrence,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^n k + u_0$$

① ou $\frac{(-1)^n S_{n,n+1}}{n!} = \frac{n(n+1)}{2} + 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

ce qui donne le résultat :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n,n+1} = (-1)^n n! \frac{n(n+1)}{2}$$

⑦ ② On a, d'après ③ ①, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n!} S_{n,n+2} = \frac{(-1)^n}{n!} n (S_{n,n+1} - S_{n-1,n+1})$$

$$S_{n,p+1} = n(S_{n,p} - S_{n-1,p}) \quad u_n \quad v_{n-1}$$

$$= n u_n + v_{n-1}$$

⑥ Montrons que $v_n = \sum_{k=1}^n k u_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

On a $\sum_{k=1}^0 k u_k = 0 = S_{0,2} \times \frac{(-1)^0}{0!} = v_0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $v_n = \sum_{k=1}^n k u_k$.

Alors $v_{n+1} = (n+1) u_{n+1} + v_n = \sum_{k=1}^{n+1} k u_k$

ce qui prouve le résultat par récurrence.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^n k u_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \times k(k+1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \times 3 + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times 2 \\ &= \frac{1}{2} n(n+1) \left(\frac{3n(n+1) + (2n+1)}{12} \right) \\ &= \frac{n(n+1)(3n^2 + 7n + 2)}{24} \end{aligned}$$

⑧ $\forall p \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} T_{n,p+1} &= \frac{(-1)^n}{n!} S_{n,p+1} = \frac{(-1)^n}{n!} n \left(S_{n,p} - S_{n-1,p} \right) \\ &= n T_{n,p} + T_{n-1,p} \end{aligned}$$

$+ \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} S_{n-1,p}$

⑨ Pour $p \in \mathbb{N}$, posons

$P(p)$: "pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n,p} \in \mathbb{N}$ et $T_{n,p} \geq 1$, $\forall 1 \leq n \leq p$ "

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après ①

$$T_{n,0} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{Donc } T_{n,0} \in \mathbb{N}.$$

De plus, comme $p=0$, la deuxième propriété n'a pas à être vérifiée.
(car $n \in \emptyset$)

Supposons $P(p)$ et montrons $P(p+1)$
pour $p \in \mathbb{N}$ fixé.

Par définition, $T_{n,p+1} \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n,p} \in \mathbb{N}$,

$$T_{n,p+1} = n T_{n,p} - T_{n,p-1} \quad \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+$$

Donc $\boxed{T_{n,p+1} \in \mathbb{N}}$

De plus $T_{n,p+1} = n \underbrace{T_{n,p}}_{\geq 1} + \underbrace{T_{n-1,p}}_{\geq 1}$
 ≥ 1 , pour tout $n \leq p$

et $T_{p+1,p+1} = \frac{(-1)^{p+1} S_{p+1,p+1}}{(p+1)!}$

$$\stackrel{⑤}{=} \frac{(-1)^{p+1} \times (-1)^{p+1} (p+1)!}{(p+1)!}$$

$$= 1$$

D'où la preuve du résultat par récurrence.

⑩ On a, pour tous $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n,p} = n! (-1)^n T_{n,p}$$

Donc $\boxed{n! \mid S_{n,p}}$ $\stackrel{⑩}{\in} \mathbb{N}$

et $S_{n,p} \leq 0$ si n est impair

et $S_{n,p} \geq 0$ sinon

$$(11) \quad T_{1,p} = \frac{(-1)^1 S_{1,p}}{1!} = (-1) \times (0^p - 1^p) = \underline{1}$$

$$\text{or } T_{2,p} = \frac{(-1)^2 S_{2,p}}{2!} = \frac{1}{2} (0^p - 2 \times 1^p + 2^p) \\ = \frac{1}{2} (2^p - 2) = \underline{2^{p-1} - 1}$$