

DS 2 : Autour du cours

du 30/09/2026

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.

Nom et prénom :

Note :

Donner les réponses sur la feuille sans justification. Vous pouvez utiliser un brouillon.

Durée : 1 heure

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)} =$$

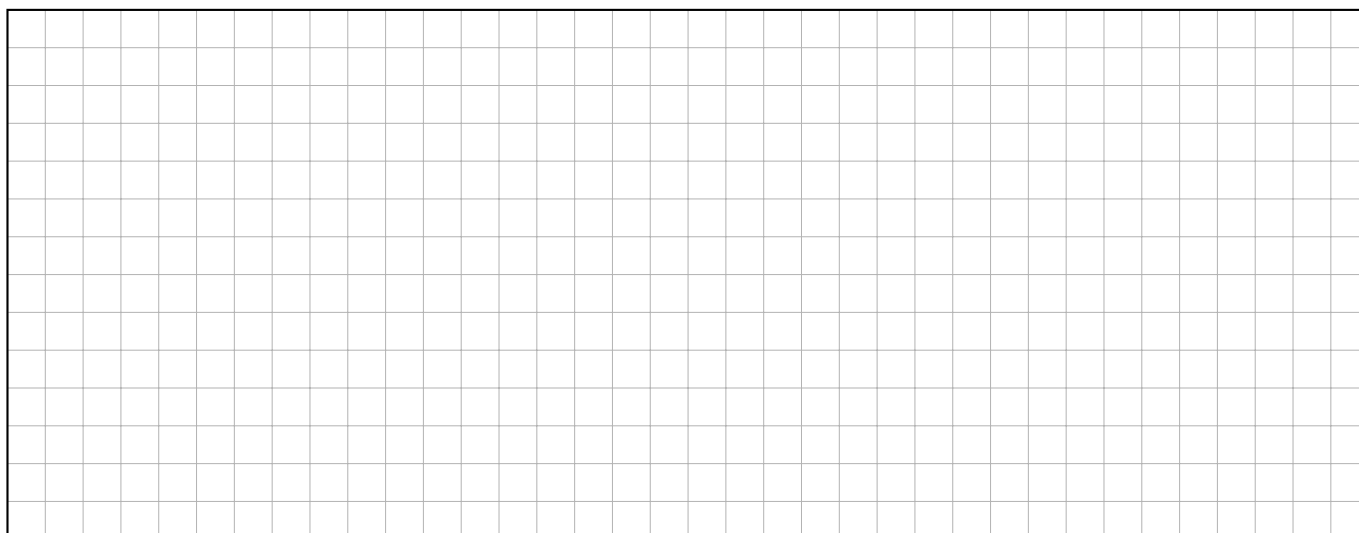
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 5x + 2} + x =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)e^x}{x^2 - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 4x + 4} =$$

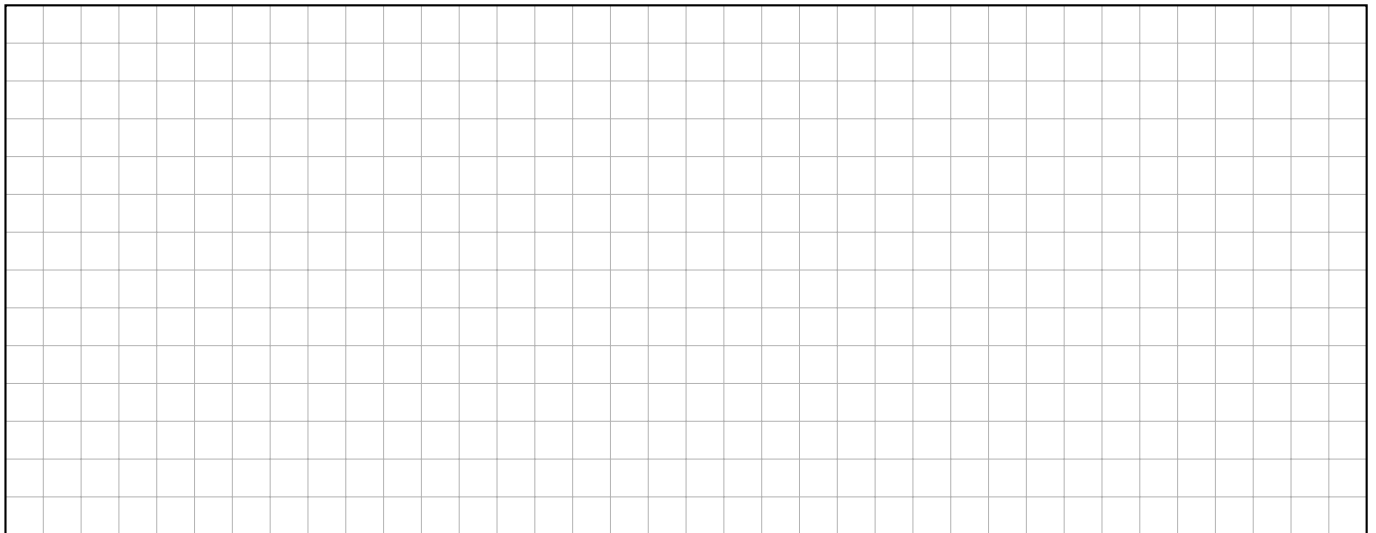
Déterminer selon la valeur de $m \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases}.$$

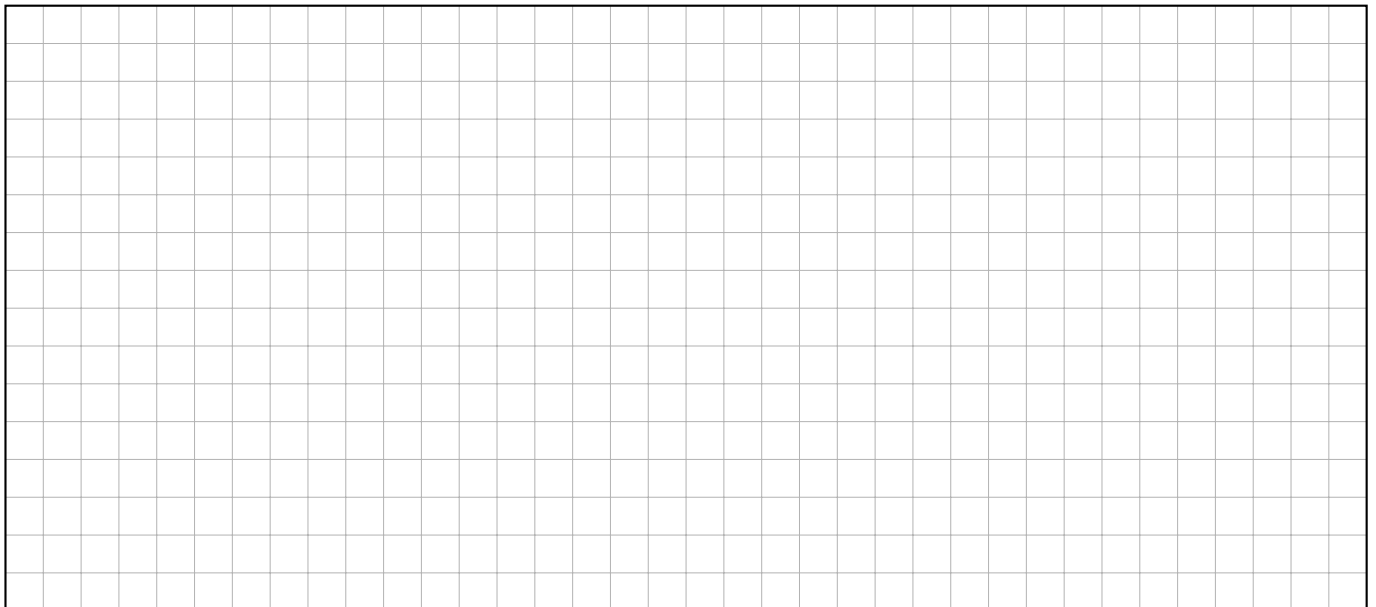


① Donner la formule de $\sin(2x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

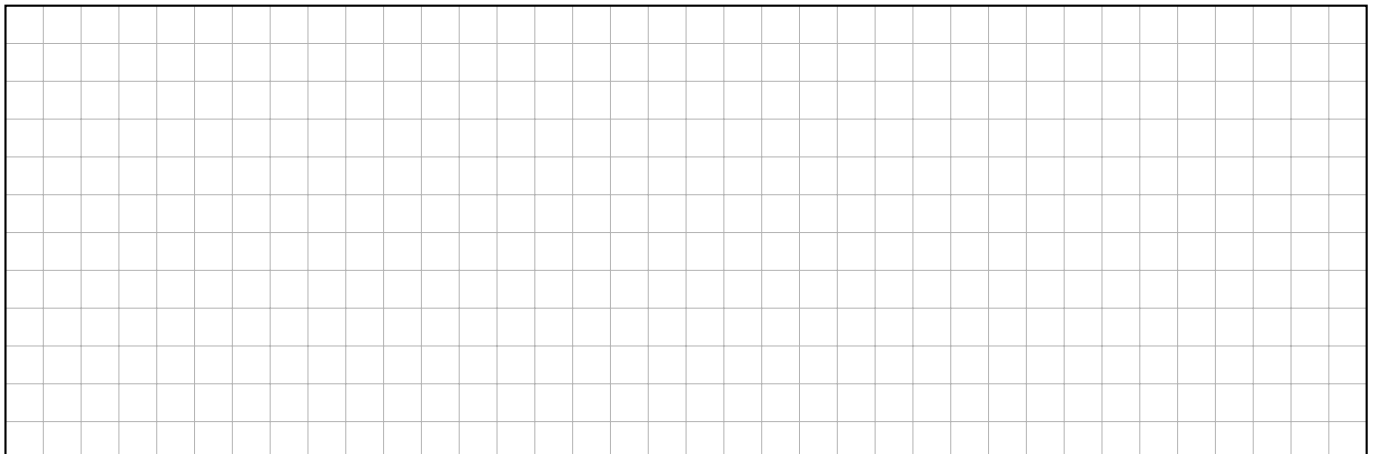
② Résoudre l'inéquation $\cos^2 x \leq \sin(2x)$.



Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes $S_0 = \sum_{k=0}^n k(k-n)$ et $S_1 = \sum_{k=1}^n x^{2k}$.



Calculer la somme $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i^2}{j(j+1)}$.



DS 2

du 30/09/2026

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.

Faites attention au soin apporté à votre présentation et à la justesse de votre rédaction.

Durée : 4 heures.

EXERCICE 1: SOMMES ET COEFFICIENTS BINOMIAUX

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

PARTIE A - L'INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ

Soient $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

① Exprimer $\sum_{0 \leq i, j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$ en fonction de $\sum_{k=0}^n a_k^2$, $\sum_{k=0}^n b_k^2$ et $\sum_{k=0}^n a_k b_k$.

② En déduire, par positivité du terme précédent, que
$$\left| \sum_{k=0}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^n b_k^2}.$$

On l'appelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

PARTIE B - LA FORMULE DE VANDERMONDE

Soit $x \in \mathbb{R}$.

③ Développer $(1+x)^{2n}$ et $(1+x)^n$.

④ Donner le coefficient de x^n dans l'expression polynômiale $((1+x)^n)^2$.

⑤ En utilisant l'égalité $(1+x)^{2n} = ((1+x)^n)^2$, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

C'est la formule de Vandermonde.

PARTIE C - CONCLUSION

⑥ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$.

On pourra s'intéresser à l'expression de 2^{2n} avec la formule du binôme de Newton.

⑦ En déduire que, pour tous $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,
$$\left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \right| \leq 2^n \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2}.$$

⑧ Soit $\lambda > 0$. On suppose que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,
$$\left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \right| \leq \lambda^n \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2}.$$

ⓐ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n}{n} \leq \lambda^{2n}$.

ⓑ En déduire que $\lambda \geq 2$. Que signifie ce résultat?

EXERCICE 2: UNE SOMME

Soient n et p deux entiers naturels. On pose

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^p$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des sommes $S_{n,p}$.

PARTIE A - UNE SOMME NULLE ?

- ① **Cas** $p = 0$. Calculer $S_{0,0}$, puis $S_{n,0}$.
- ② **Cas** $p = 1$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k$.
- (a) Calculer $S_{0,1}$ et $S_{1,1}$.
- (b) En utilisant la formule du binôme simplifier $f(x)$.
- (c) Donner deux expressions différentes de la dérivée $f'(x)$, en utilisant l'égalité juste démontrée.
- (d) Dédire de la question précédente la valeur de $S_{n,1}$ pour tout entier $n > 1$.
- ③ **Cas avec** $n > p$.
- (a) En utilisant la formule du pion et la formule de Pascal, montrer que, pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $n \geq p + 1$,
- $$S_{n,p+1} = n(S_{n,p} - S_{n-1,p}) .$$
- (b) En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n > p, S_{n,p} = 0$, par récurrence sur p .

PARTIE B - PREMIERS CAS NON TRIVIAUX, $p = n, n + 1$ ET $n + 2$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La preuve de ③a reste vraie pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$. On considère le résultat alors vrai pour ces valeurs de p et n .

- ④ En utilisant cette relation pour $n = p$, en déduire, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n,n} = (-1)^n n!$.
- ⑤ On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^n S_{n,n+1}}{n!}$. Établir une relation entre u_n et u_{n-1} , puis en déduire

$$S_{n,n+1} = (-1)^n n! \frac{n(n+1)}{2} .$$

- ⑥ On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{(-1)^n S_{n,n+2}}{n!}$.
- (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $v_n = n u_n + v_{n-1}$.
- (b) En déduire, à l'aide de $\sum_{k=1}^n k^2$ et $\sum_{k=1}^n k^3$, la valeur de $S_{n,n+2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

PARTIE C - CAS GÉNÉRAL $p \geq n$

On pose, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $T_{n,p} = \frac{(-1)^n S_{n,p}}{n!}$.

- ⑦ Montrer que, pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$, $T_{n,p+1} = n T_{n,p} + T_{n-1,p}$.
- ⑧ Montrer par récurrence sur p que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n,p} \in \mathbb{N}$, et que $T_{n,p} \geq 1$ si $1 \leq n \leq p$.
- ⑨ Qu'en déduit-on sur la divisibilité et le signe de $S_{n,p}$?
- ⑩ Calculer $T_{1,p}$ et $T_{2,p}$ pour $p \geq 1$.

Remarque culturelle. $T_{n,p}$ est le nombre de Stirling de seconde espèce $\left\{ \begin{matrix} p \\ n \end{matrix} \right\}$.
C'est le nombre de partitions d'un ensemble à p éléments en n parts.

Fin de l'énoncé.