

Concours blanc 2026

CORRECTION

PARTIE ANALYSE – AUTOUR D'UNE FONCTION

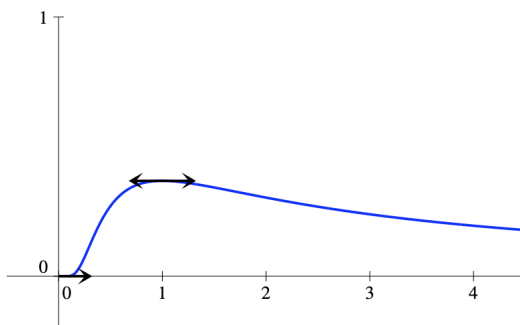
- ① pour tout $t > 0$, $f'(t) = \frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}$, donc $tf'(t) = g(t)$.
- ② On a, par croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0$, ce qui permet de prolonger g par continuité en 0, par $g(0) = 0$.
Le taux d'accroissement $g(t)/t$ a toujours une limite nulle en 0 par croissance comparée.

La fonction g est donc dérivable en 0, et $g'(0) = 0$.

- ③ La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $g'(t) = -\frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}} + \frac{1}{t^3}e^{-\frac{1}{t}} = \frac{e^{-\frac{1}{t}}(1-t)}{t^3}$.
Cette dérivée est du signe de $1-t$, donc g est croissante sur $[0, 1]$ puis décroissante sur $[1, +\infty[$, avec pour maximum $g(1) = e^{-1}$. On peut donner le tableau de variation

x	0	1	$+\infty$
g'		0	
$g(x)$	0	$\frac{1}{e}$	0

Puis la courbe en n'oubliant pas la tangente horizontale en 0



- ④ Il s'agit donc de calculer, pour $t > 0$, $H(t) = \int_1^t xe^{-x} dx$. Par IPP, pour tout $t > 0$,

$$H(t) = [-xe^{-x}]_1^t + \int_1^t e^{-x} dx = -te^{-t} + \frac{1}{e} + [-e^{-x}]_1^t = -(t+1)e^{-t} + \frac{2}{e}.$$
Comme on nous demande un développement limité en 1, on va poser $u = t-1$ histoire d'avoir u qui tend vers 0, et on a alors

$$H(t) = \frac{2}{e} - \frac{1}{e}(u+2)e^{-u} = \frac{2}{e} - \frac{1}{e}(u+2) \left(1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + o(u^3) \right) = \frac{2}{e} - \frac{2}{e} + \frac{1}{e}u - \frac{1}{e}\frac{u^3}{6} + o(u^3), \text{ soit}$$

$$H(t) \underset{t \rightarrow 1}{=} \frac{t-1}{e} - \frac{(t-1)^3}{6e} + o((t-1)^2).$$
- ⑤ (a) L'équation (E_n) est équivalente à $g(t) = \frac{1}{n}$. Or, la fonction g est bijective de $[0, 1[$ vers $[0, \frac{1}{e}[$.
Lorsque $n \geq 3$, $\frac{1}{n} \in [0, \frac{1}{e}[$, donc l'équation $g(t) = \frac{1}{n}$ admet bien une unique solution sur l'intervalle $[0, 1[$, et même sur $]0, 1[$ puisque $g(0) = 0$.
- (b) Par construction, α_n et α_{n+1} appartiennent à un intervalle où g est croissante, et $\frac{1}{n+1} = g(\alpha_{n+1}) < g(\alpha_n) = \frac{1}{n}$. On en déduit, par l'absurde par exemple, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ et donc que la

suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. C'est exactement le même raisonnement pour $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mais on est cette fois-ci sur un intervalle où g est décroissante, ce qui donne une suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante.

- (c) Supposons donc que $\lim \alpha_n = l > 0$. Alors, par continuité de la fonction g , on aurait $\lim g(\alpha_n) = g(l)$. Mais on sait déjà que $g(\alpha_n) = \frac{1}{\alpha_n}$, qui a une limite nulle. Comme aucun réel strictement positif ne vérifie $g(l) = 0$, l'hypothèse est absurde. On fait le même raisonnement pour la suite (β_n) .

Étant décroissante minorée par 0, la suite (α_n) converge tout de même, donc $\lim \alpha_n = 0$. Étant croissante et ne pouvant pas avoir de limite finie, la suite (β_n) diverge vers $+\infty$.

- (6) On sait que pour tout $t > 0$, $f'(t) = \frac{g(t)}{t}$ et on a déjà prouvé plus haut que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{t} = 0$. On peut donc appliquer le théorème du prolongement de la dérivée pour affirmer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

- (7) (a) Il s'agit des primitives des fonctions f et g s'annulant en 0. Elles existent, d'après le théorème fondamental de l'analyse, comme ces deux fonctions sont continues.

(b) Par IPP, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{t}} dt = [tf(t)]_0^x - \int_0^x g(t) dt = xe^{-\frac{1}{x}} - G(x).$$

(c) Avec une relation de Chasles en 1, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$G(x) = \int_0^1 g(t) dt + \int_1^x \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t} dt.$$

Lorsque $t \geq 1$, on peut majorer assez brutalement $e^{-\frac{1}{t}}$ par 1, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$G(x) \leq G(1) + \int_1^x \frac{1}{t} dt = G(1) + \ln(x).$$

Le fait que $G \geq 0$ vient de la positivité de l'intégrale, puisqu'on intègre une fonction positive.

- (d) Par somme, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $xe^{-\frac{1}{x}} \geq F(x) \geq xe^{-\frac{1}{x}} - G(1) - \ln(x)$. En divisant par x , puis en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient, d'après le théorème d'encadrement que $\frac{F(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$. Finalement $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$.

- (8) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, qu'on va normaliser pour la mettre sous la forme $y' + \frac{1}{x^2}y = 1$. Le cours donne que, les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_h : x \mapsto Ke^{\frac{1}{x}}$, avec $K \in \mathbb{R}$. De plus, une solution de l'équation différentielle est donnée par la méthode de variation de la constante, par $y_p = e^{\frac{1}{x}} \int_0^x f(t) dt = e^{\frac{1}{x}} F(x)$.

Les solutions de (E) sont alors toutes les fonctions $y : x \mapsto (F(x) + K)e^{\frac{1}{x}}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

- (9) En remplaçant x par 0 dans l'équation, on obtient $0 \times y'(0) + y(0) = 0$, donc $u_0 = y(0) = 0$.

- (10) Dérivons. On a $2xy' + x^2y'' + y' = 2x$, donc en remplaçant à nouveau x par 0, $u_1 = y'(0) = 0$.

Dérivons encore. On a $2y' + 2xy'' + 2xy'' + x^2y''' + y'' = 2$, donc $u_2 = y''(0) = 2$.

- (11) Testons. Si $P = aX^2 + bX + c$ était solution de (E), il devrait vérifier d'après les questions précédentes $P'(0) = P(0) = 0$, donc $b = c = 0$, et $P''(0) = 2$, donc $2a = 2$, soit $a = 1$. Autrement dit, on aurait $P(x) = x^2$. Mais si on remplace dans l'équation (E), on trouve alors $x^2 \times 2x + x^2 = x^2$, ce qui est absurde. Donc aucun polynôme du second degré ne peut donc convenir.

- (12) Il suffit de dériver n fois l'équation (E). Puisqu'on suppose $n \geq 3$, le membre de droite va devenir nul. À gauche la formule de Leibniz permet de calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} y^{(n+1-k)} + y^{(n)} = 0$$

$$\Longleftrightarrow x^2 y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} + y^{(n)} = 0.$$

En remplaçant x par 0, on en déduit que $u_n + n(n-1)u_{n-1} = 0$, donc $u_n = -n(n-1)u_{n-1}$.

- 13 On montre par récurrence que $\forall n \geq 2, u_n = (-1)^n n!(n-1)!$.

Initialisation. Pour $n = 2$, on retrouve bien $u_2 = 2! \times 1! = 2$.

Hérédité. Supposons la formule vérifiée au rang $n \geq 3$ fixé, alors d'après la question précédente, $u_{n+1} = -(n+1)nu_n = -(-1)^n(n+1)n \times n!(n-1)! = (-1)^{n+1}(n+1)!n!$, ce qui prouve l'hérédité.

La propriété est donc prouvée par récurrence.

- 14 La formule précédente donne $u_3 = y'''(0) = -6 \times 2 = -12$, puis $u_4 = y^{(4)}(0) = 24 \times 6 = 144$. Il ne reste alors plus qu'à appliquer la formule de Taylor-Young pour obtenir le DL demandé, en n'oubliant pas les division par $n!$, $y(x) = x^2 - 2x^3 + 6x^4 + o(x^4)$.

PARTIE ALGÈBRE – MATRICES DE RANG 1

- ① Choisissons un indice $j_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que la colonne j_0 est non nulle (ce qui est possible, puisque $A \neq 0$). On note cette colonne

$$A_{j_0} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

La matrice A est de rang 1, ses colonnes forment une famille de rang 1; autrement dit, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la colonne A_j est proportionnelle à la colonne A_{j_0} ; autrement dit, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ tel que $A_j = \alpha_j A_{j_0}$. On obtient alors

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{i,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \alpha_j \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Dit autrement : pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_{i,j} = \alpha_j b_i$.

Ceci étant valable pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a montré l'existence des deux n -uplets $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que, pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_{i,j} = \alpha_j b_i$.

- ② On revient à la définition du produit matriciel. Soit $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} (A^2)_{i,j} &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n b_i \alpha_k b_k \alpha_j \\ &= b_i \alpha_j \sum_{k=1}^n b_k \alpha_k \\ &= a_{i,j} \sum_{k=1}^n b_k \alpha_k \\ &= a_{i,j} \sum_{k=1}^n a_{k,k} \\ &= \text{tr}(A) a_{i,j} \\ &= (\text{tr}(A) A)_{i,j} \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on en déduit l'égalité matricielle $A^2 = \text{tr}(A) A$.

- ③ ① La matrice A étant de rang 1, par le théorème du rang, on a

$$\dim(\text{Ker}(f)) = n - \text{rg}(f) = n - 1$$

- ② Comme $w \in \text{Im}(f)$, par définition, il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $w = f(u)$. On a alors, par la question 2:

$$f(w) = f^2(u) = A^2 u = \text{tr}(A) A u = \text{tr}(A) f(u) = \text{tr}(A) w$$

On a donc $f(w) = \text{tr}(A) w$.

- ③ ▶ Soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. On a alors $f(x) = 0$, et de plus, il existe $x' \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = f(x')$. D'où, par la question 3b

$$0 = f(x) = f^2(x') = \text{tr}(A) x,$$

ce qui implique, comme $\text{tr}(A) \neq 0$, que $x = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.

- ▶ De plus, comme $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$, on en déduit la somme directe attendue: $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Remarque: on aurait aussi pu montrer que $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = \mathbb{R}^n$ à l'aide d'une analyse synthèse que voici, just for fun.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, et supposons qu'il existe $u \in \text{Ker}(f)$ et $v \in \text{Im}(f)$ tels que $x = u + v$.

On a alors, par linéarité de f , et en utilisant la question 3b (on a $v \in \text{Im}(f)$):

$$f(x) = f(u) + f(v) = f(v) = \text{tr}(A)v$$

Comme $\text{tr}(A) \neq 0$ par hypothèse, on en déduit que

$$v = \frac{1}{\text{tr}(A)} f(x), \quad \text{et} \quad u = x - v$$

Fin de l'analyse. Synthèse : posons $v := \frac{1}{\text{tr}(A)} f(x)$, et $u := x - v$.

D'une part, on a $u + v = x$, par construction. De plus, par linéarité de f , on a

$$v = \frac{1}{\text{tr}(A)} f(x) = f\left(\frac{1}{\text{tr}(A)} x\right) \quad : \quad \in \text{Im}(f)$$

De même, par linéarité,

$$f(u) = f(x) - f(v) = f(x) - \text{tr}(A)v = f(x) - \text{tr}(A) \times \frac{1}{\text{tr}(A)} f(x) = 0$$

Donc $u \in \text{Ker}(f)$.

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un couple $(u, v) \in \text{Ker}(f) \times \text{Im}(f)$ tel que $x = u + v$.

On a donc bien $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$. Pour info, cette analyse-synthèse montre également l'unicité de la décomposition; on en déduit alors directement que

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$$

- ④ On sait que $\text{rg}(A) = 1$, donc il existe $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, tel que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(u)$, et (u) forme une base de $\text{Im}(f)$. D'après la question 3b, on a $f(u) = \text{tr}(A)u$.

De plus, par la question 3a, $\dim(\text{Ker}(f)) = n - 1$; considérons alors $(u_1, \dots, u_{n-1})$ une base de $\text{Ker}(f)$. Alors, comme $\mathbb{R}^n = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$, par le théorème des bases adaptées, la famille $\mathcal{C} := (u, u_1, \dots, u_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(u)) = \begin{bmatrix} \text{tr}(A) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{et pour tout } i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(u_i)) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

On en déduit que la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est

$$\begin{pmatrix} \text{tr}(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ④ Notons f_n l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice J_n . Il s'agit d'appliquer la question 3d de la partie I : la matrice J_n est de rang 1, puisque toutes ses colonnes sont colinéaires; sa trace vaut

$$\text{tr}(J_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n} = 1$$

Donc il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} =: D_n$$

Par la formule de changement de base, on a en notant B la base canonique de $\mathbb{R}^n$,

$$J_n = \text{Mat}_B(f_n) = P_{B \leftarrow \mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f_n) P_{\mathcal{C} \leftarrow B}$$

En posant $P_n := P_{B \leftarrow \mathcal{C}}$, on obtient l'égalité matricielle souhaitée.

- ⑤ Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, et supposons qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$. On a alors, par propriété du déterminant:

$$\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P) \det(B) \det(P^{-1}) = \det(P) \det(B) \det(P)^{-1} = \det(B)$$

On en déduit que les deux matrices semblables A et B ont bien même déterminant.

- ⑥ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes, en utilisant la question 5:

$$\begin{aligned} J_n + \lambda I_n \text{ non inversible} &\iff \det(J_n + \lambda I_n) = 0 \\ &\iff \det(P_n D_n P_n^{-1} + \lambda I_n) = 0 \\ &\iff \det(P_n (D_n + \lambda I_n) P_n^{-1}) = 0 \\ &\iff \det(D_n + \lambda I_n) = 0 \end{aligned}$$

Or,

$$\det(D_n + \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda) \lambda^{n-1}$$

Ainsi, on a les équivalences:

$$J_n + \lambda I_n \text{ non inversible} \iff (1+\lambda) \lambda^{n-1} = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = -1$$

L'ensemble cherché est donc $\boxed{\{0; -1\}}$.

- ⑦ Soit $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On a

$$J_n W = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} w_1 + \cdots + w_n \\ \vdots \\ \vdots \\ w_1 + \cdots + w_n \end{pmatrix} = \frac{w_1 + \cdots + w_n}{n} V$$

On en déduit que $J_n W \in \text{Vect}(V)$.

- ⑧ Si $M = 0$, l'équation (E) s'écrit

$$x^n \det J_n = 0$$

Comme $n \geq 2$, alors $\det J_n = 0$, donc $\boxed{\mathcal{S}_E = \mathbb{R}}$.

- ⑨ Supposons maintenant $M = I_n$, l'équation E s'écrit

$$\det(I_n + x J_n) = 0$$

Comme $\det(I_n) \neq 0$, 0 n'est pas solution. Supposons donc $x \neq 0$; on a alors les équivalences:

$$\begin{aligned} x \text{ solution} &\iff x^n \det \left(\frac{1}{x} I_n + J_n \right) = 0 \\ &\iff \det \left(\frac{1}{x} I_n + J_n \right) = 0 \\ &\iff J_n + \frac{1}{x} I_n \text{ non inversible} \end{aligned}$$

Or, par la question 6, l'ensemble des valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que $J_n + \lambda I_n$ est non inversible est $\{0; -1\}$; on en déduit l'équivalence

$$x \text{ solution} \iff \frac{1}{x} = 0 \text{ ou } \frac{1}{x} = -1 \iff x = -1$$

On a ainsi montré que $\boxed{\mathcal{S}_E = \{-1\}}$.

- 10 (a) Soit $U \in \text{Ker}(M + xJ_n)$. On a alors

$$0 = (M + xJ_n)U = MU + xJ_nU, \text{ d'où } U = -xM^{-1}J_nU$$

Or, par la question 7, on sait que $J_nU \in \text{Vect}(V)$, donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $J_nU = aV$. Ceci montre que

$$U = -axM^{-1}V \quad : \quad \text{donc } U \text{ colinéaire à } M^{-1}V$$

- (b) On utilise le calcul de la question 7; on a alors les équivalences:

$$\begin{aligned} (M + xJ_n)W = 0 &\iff MW + xJ_nW = 0 \iff MM^{-1}V + xJ_nW = 0 \\ &\iff V + x \frac{\sigma}{n} V = 0 \\ &\iff \left(1 + x \frac{\sigma}{n}\right) V = 0 \\ &\iff 1 + x \frac{\sigma}{n} = 0 \quad (\text{car } V \neq 0) \end{aligned}$$

- (c) Tout d'abord, on a l'équivalence

$$\text{Ker}(M + xI_n) \neq \{0\} \iff W \in \text{Ker}(M + xI_n)$$

Montrons-le. Tout d'abord, la question 10a permet d'avoir l'implication directe. Supposons en effet qu'il existe $U \in \text{Ker}(M + xJ_n)$, $U \neq 0$. Par la question 10a, on en déduit que U est colinéaire à W : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $U = \lambda W$, avec $\lambda \neq 0$ car $U \neq 0$.

On a donc par définition de U :

$$(M + xJ_n)(\lambda W) = 0,$$

et comme $\lambda \neq 0$, cela implique que

$$(M + xJ_n)W = 0, \text{ donc } W \in \text{Ker}(M + xJ_n)$$

L'implication directe a été démontrée.

La réciproque est assurée par le fait que $W \neq 0$, ce qui est vrai car $V \neq 0$ et M inversible (donc de noyau réduit à $\{0\}$).

On a donc deux cas selon la valeur de σ :

- Si $\sigma \neq 0$, alors la question précédente a montré que W (qui est non nul) est dans le noyau de $M + xJ_n$ si et seulement si $1 + x \frac{\sigma}{n} = 0$, càd $x = -\frac{n}{\sigma}$.

Ceci montre que $\mathcal{S}_E = \left\{-\frac{n}{\sigma}\right\}$.

- Si $\sigma = 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + x \frac{\sigma}{n} \neq 0$, ce qui par la question précédente, montre que $(M + xJ_n)W \neq 0$, donc que W n'est pas dans le noyau de $M + xJ_n$.

Ainsi, $M + xJ_n$ est inversible, ce qui implique que $\mathcal{S}_E = \emptyset$.

- 11 (a) Comme, par hypothèse, M est non inversible, on a $\det(M) = 0$; autrement dit,

$$\det(M + 0 \times J_n) = 0 \quad : \quad \text{donc } 0 \in \mathcal{S}_E$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (E) &\iff \det(M + xJ_n) = 0 \\ &\iff \det(M + bJ_n + (x - b)J_n) = 0 \\ &\iff x - b \text{ solution de } (F) \end{aligned}$$

On en déduit que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_E & \rightarrow & \mathcal{S}_F \\ x & \mapsto & x - b \end{array}$ est une bijection entre les deux ensembles $\mathcal{S}_E$ et $\mathcal{S}_F$ (on avait dit une bijection simple!).

- © ► S'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $M + bJ_n$ est inversible, on retrouve le cadre de la question 10. On se retrouve alors avec deux cas; notons alors σ la somme des coordonnées du vecteur $(M + bJ_n)^{-1} V$.
- Si $\sigma = 0$, alors on obtient $\mathcal{S}_F = \emptyset$. Par la bijection précédente, on en déduit que $\mathcal{S}_E = \emptyset$.
 - Si $\sigma \neq 0$, on en déduit par ce qui précède que $\mathcal{S}_F = \left\{ -\frac{n}{\sigma} \right\}$. Par la bijection précédente, on a alors $\mathcal{S}_E = \left\{ -\frac{n}{\sigma} + b \right\}$.
- Si, pour tout $b \in \mathbb{R}$, $M + bJ_n$ n'est pas inversible, alors tout réel $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation (F) . Autrement dit, $\mathcal{S}_F = \mathbb{R}$, et donc $\mathcal{S}_E = \mathbb{R}$.