

Concours blanc 2026

Faites attention au soin apporté à votre présentation et à la justesse de votre rédaction.

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.

Les deux problèmes sont indépendants, valent chacun 10 points sur 20, et doivent être rendus dans **2 ensembles de copies différents**, en écrivant distinctement ALGÈBRE et ANALYSE sur la première copie de chaque ensemble.

Durée : 4 heures.

PARTIE ANALYSE – AUTOUR D'UNE FONCTION

Pour tout l'exercice, on définit sur $]0, +\infty[$ deux fonctions f et g par $f(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ et $g(t) = \frac{f(t)}{t}$.

PARTIE A - GÉNÉRALITÉS

- ① Montrer que, $\forall t > 0$, $tf'(t) = g(t)$.
- ② Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement, qu'on continuera à noter g , est dérivable en 0.
- ③ Dresser le tableau de variations de la fonction g , et donner une allure de son graphe. *On rappelle que $\frac{1}{e} \simeq 0.36$.*

On note H la primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto g\left(\frac{1}{t}\right)$ s'annulant en 1.

- ④ Calculer H , puis donner son développement limité à l'ordre 3 en 1.
- ⑤ Soit $n \geq 3$, on note (E_n) l'équation $f(t) = \frac{t}{n}$.
 - ⓐ Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution sur l'intervalle $]0, 1[$, que l'on notera α_n .
On montrerait de même que l'équation admet une unique solution β_n sur $]1, +\infty[$.
 - ⓑ Montrer que les deux suites (α_n) et (β_n) sont monotones.
 - ⓒ En raisonnant par l'absurde, montrer que ces deux suites ne peuvent pas avoir une limite finie $l > 0$.
En déduire leurs limites.

PARTIE B - FONCTIONS DÉFINIES PAR DES INTÉGRALES

Dans cette deuxième partie, on prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

- ⑥ Montrer que f ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
Préciser $f'(0)$ et montrer que l'égalité démontrée à la question ① reste valable en 0.
- ⑦ On note pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_0^x g(t)dt$.
On ne cherchera surtout pas à les calculer dans ce sujet.
 - ⓐ Que représentent les fonctions F et G pour f et g ? Justifier de leur existence sur $\mathbb{R}_+$.
 - ⓑ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = xe^{-\frac{1}{x}} - G(x)$. *On pourra faire une IPP.*
 - ⓒ A l'aide d'une relation de Chasles, montrer que $\forall x \geq 1$, $0 \leq G(x) \leq G(1) + \ln(x)$.
 - ⓓ En déduire un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
- ⑧ Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $(E) : x^2y' + y = x^2$, en faisant apparaître la fonction F dans l'expression des solutions.

PARTIE C - ÉTUDE QUALITATIVE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Dans cette dernière partie, y est une solution quelconque de l'équation différentielle (E) définie à la question (8), mais sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

On notera, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = y^{(n)}(0)$. Toutes les solutions de (E) sont donc $\mathcal{C}^\infty$.

- (9) Que vaut u_0 ?
- (10) En dérivant l'équation (E) , calculer u_1 et u_2 .
- (11) Un polynôme du second degré peut-il être solution de (E) sur $[0, +\infty[$?
- (12) À l'aide de la formule de Leibniz, montrer que, si $n \geq 3$,

$$x^2 y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0$$

En déduire une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1} .

- (13) Donner une expression de u_n à l'aide de factorielles, valable pour $n \geq 2$.
- (14) En déduire le développement limité à l'ordre 4 de la fonction y en 0.

PARTIE ALGÈBRE – MATRICES DE RANG 1

PARTIE A - GÉNÉRALITÉS

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $\text{rg}(A) = 1$. On note

$$\text{tr}(A) := \sum_{k=1}^n a_{kk}$$

Ce nombre est appelé *trace de la matrice* A .

- ① En discutant des colonnes de A , montrer qu'il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (b_1, \dots, b_n)$ des éléments de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{ij} = b_i \alpha_j$$

- ② Montrer que $A^2 = \text{tr}(A) \cdot A$. On pourra utiliser la formule du produit matriciel.
- ③ On suppose que $\text{tr}(A) \neq 0$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .
- ③ a) Que vaut $\dim(\text{Ker}(f))$?
- ③ b) Soit $w \in \text{Im}(f)$. Exprimer $f(w)$ en fonction de w .
- ③ c) Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
- ③ d) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \text{tr}(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PARTIE B - UN CAS PARTICULIER

Soit $n \geq 2$. On considère la matrice J_n de taille n à coefficients réels dont tous les coefficients sont égaux à $\frac{1}{n}$:

$$J_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1 est noté V .

- ④ Soit $D_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale suivante:

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe $P_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $J_n = P_n D_n P_n^{-1}$.

- ⑤ Deux matrices semblables ont-elles même déterminant? Justifier.
- ⑥ Déterminer les réels λ , tels que $J_n + \lambda I_n$ n'est pas inversible.
- ⑦ Montrer que pour tout vecteur colonne W de $\mathbb{R}^n$, $J_n W \in \text{Vect}(V)$.

PARTIE C - APPLICATION À LA RÉOLUTION D'UNE ÉQUATION

Soit $n \geq 2$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$. Dans cette partie, on considère l'équation (E) d'inconnue le réel x :

$$\det(M + xJ_n) = 0. \quad (E)$$

On note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

- ⑧ Lorsque $M = 0$, où 0 désigne la matrice nulle, déterminer $\mathcal{S}_E$.
- ⑨ Lorsque $M = I_n$, où I_n désigne la matrice identité, montrer que $\mathcal{S}_E$ est réduit à un unique élément. Préciser cet élément.
- ⑩ On suppose M inversible. Soit $x \in \mathbb{R}$.
 - ① Montrer que tout vecteur du noyau de $M + xJ_n$ est colinéaire au vecteur $M^{-1}V$.
 - ② Soit $W = M^{-1}V$. On notant σ la somme des coordonnées du vecteur W , démontrer l'équivalence:

$$(M + xJ_n)W = 0 \iff \left(1 + x\frac{\sigma}{n}\right) = 0$$

- ③ Dédire des questions précédentes l'ensemble $\mathcal{S}_E$ en fonction de la valeur de σ .
- ⑪ On se propose de déterminer $\mathcal{S}_E$ lorsque M est non inversible.
 - ① Montrer que $\mathcal{S}_E$ est non vide.
 - ② S'il existe un réel b tel que $M + bJ_n$ est inversible, établir une bijection *simple* entre $\mathcal{S}_E$ et l'ensemble $\mathcal{S}_F$ des solutions de l'équation (F) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ définie par

$$\det(M + bJ_n + xJ_n) = 0. \quad (F)$$

- ③ Conclure sur l'ensemble $\mathcal{S}_E$ dans les différents cas.