

DS 8

du 26/3/2025

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.
Faites attention au soin apporté à votre présentation et à la justesse de votre rédaction.

CORRECTION

LOGIQUE

Donner la négation de

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x \leq -M \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leq -M \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon.$$

TRIGONOMETRIE

Primitive de $x \mapsto \cos^4(x) \sin^2(x)$:

$$\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx = \frac{x}{16} + \frac{1}{64} \sin(2x) - \frac{1}{64} \sin(4x) - \frac{1}{192} \sin(6x) + C.$$

Donner l'ensemble des solutions de l'équation $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos x + \sqrt{3} \sin x > 1$, $x \in \mathbb{R}$.

$$2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > 1 \implies \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2} \implies x \in \left]2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

LIMITES

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 2x + 3)}{\sqrt{x}} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x e^x}{x^2 - 1} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 1}{x^3 - 5x + 7} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2x - 5) e^{x^{1/4}} \ln x = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \boxed{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 5x + 2} + x = \boxed{\frac{5}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 4x + 3} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

RAISONNEMENTS

Résoudre $x - 1 = \sqrt{x} + 4$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ (rédaction compl'ete).

Posons $t = \sqrt{x} \geq 0$, alors $x = t^2$. L'équation devient

$$t^2 - 1 = t + 4 \iff t^2 - t - 5 = 0.$$

Les solutions sont $t = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. Comme $t \geq 0$ on garde $t = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$. Ainsi $x = t^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{21}}{2}\right)^2 = \frac{11 + \sqrt{21}}{2}$.

(Seule solution dans $\mathbb{R}_+$: $\boxed{\frac{11 + \sqrt{21}}{2}}$.)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Pour $n = 0$, $\sum_{k=0}^0 k^3 = 0$ et $\frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$. Supposons la formule vraie pour n fixé, alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^n k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + (n+1) \right) = (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Donc la propriété vaut pour $n + 1$. Par récurrence la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 1: ETUDE DE LA SÉRIE HARMONIQUE

- ① On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$. Comme $\frac{1}{n+1} \geq 0$ on en déduit que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
- ② On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

- ③ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

- ④ On écrit, pour $m \geq 1$,

$$H_{2^m} = H_1 + \sum_{j=0}^{m-1} (H_{2^{j+1}} - H_{2^j}) .$$

Or d'après (3) chaque différence $H_{2^{j+1}} - H_{2^j} \geq \frac{1}{2}$. Donc

$$H_{2^m} \geq H_1 + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}$$

d'où le résultat.

- ⑤ La suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante donc admet une limite : ou bien un réel $\ell \in \mathbb{R}$ ou bien $+\infty$. Supposons que c'est un réel $\ell \in \mathbb{R}$. Alors en passant à la limite dans le résultat de la question précédente on obtient $\ell - \ell = 0 \geq \frac{1}{2}$, ce qui est impossible. Donc $H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- ⑥ Soit $n \geq 2$ un entier pair. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2r$. Supposons P_n . Soit donc $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $H_n = \frac{2p+1}{2q}$. Alors

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= \frac{2p+1}{2q} + \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{2p+1}{2q} + \frac{1}{2r+1} \\ &= \frac{(2p+1)(2r+1) + 2q}{2q(2r+1)} \\ &= \frac{2(q + p(2r+1) + r) + 1}{2q(2r+1)} \end{aligned}$$

Donc en posant $P = q + p(2r+1) + r$ et $Q = q(2r+1)$, qui sont bien entiers, nous avons $H_{n+1} = \frac{2P+1}{2Q}$, et ainsi P_{n+1} est vraie.

- ⑦ Soit p, q deux entiers naturels impairs. Soit k, ℓ deux entiers naturels. Soit $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $p = 2a+1$ et $q = 2b+1$. Alors,

$$\begin{aligned} \frac{k}{p} + \frac{\ell}{q} &= \frac{k}{2a+1} + \frac{\ell}{2b+1} \\ &= \frac{k(2b+1) + \ell(2a+1)}{(2a+1)(2b+1)} \\ &= \frac{k(2b+1) + \ell(2a+1)}{4ab + 2a + 2b + 1} \\ &= \frac{k(2b+1) + \ell(2a+1)}{2(2ab + a + b) + 1} \end{aligned}$$

Ainsi,

$\frac{k}{p} + \frac{\ell}{q}$ s'écrit comme un rationnel de dénominateur impair.

⑧ On a

$$\begin{aligned}
 H_{n+1} &= H_{2(m+1)} \\
 &= \sum_{k=1}^{2(m+1)} \frac{1}{k} \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2(m+1)} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2(m+1)} \frac{1}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{2k-1} \\
 &= \frac{1}{2} H_{m+1} + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{2k-1}.
 \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, une somme de rationnels de dénominateur impair peut être écrite comme un rationnel de dénominateur impair. Remarquons que $\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{2k-1}$ est une somme de rationnels de dénominateurs impairs. Ainsi, il existe un nombre rationnel r de dénominateur impair tel que

$$H_{n+1} = \frac{H_{m+1}}{2} + r.$$

⑨ Puisque $H_2 = \frac{3}{2}$, nous pouvons écrire $H_1 = \frac{2p+1}{2q}$ en posant $p = q = 1$, et ainsi P_2 est vraie.

Soit $n \geq 2$, supposons que $P_2, \dots, P_n$ sont vraies.

Si n est pair, d'après la question 5., on a bien P_{n+1} .

Si n est impair, soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2(m+1)$. Comme $n \geq 2$, on a $n+1 \geq 3$ et donc $m+1 \geq 2$. D'après la question précédente, il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que

$$H_{n+1} = \frac{H_{m+1}}{2} + \frac{a}{2b+1}.$$

Comme $2 \leq m+1 \leq n$, on a P_{m+1} . Ainsi, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $H_{m+1} = \frac{2p+1}{2q}$. Alors

$$\begin{aligned}
 H_{n+1} &= \frac{2p+1}{2q} + \frac{a}{2b+1} \\
 &= \frac{(2p+1)(2b+1) + 2aq}{2q(2b+1)} \\
 &= \frac{2(2pb + p + b + aq) + 1}{2q(2b+1)}.
 \end{aligned}$$

Donc en posant $P = q + p(2r+1) + r$ et $Q = q(2r+1)$, nous avons $H_{n+1} = \frac{2P+1}{2Q}$, et ainsi P_{n+1} est vraie.

On conclut par principe de récurrence.

EXERCICE 2: UN PRODUIT TRIGONOMETRIQUE

PARTIE A - SIMPLIFICATION DU PRODUIT ET CALCUL

① D'après la formule de duplication, $\sin a \cos a = \frac{\sin 2a}{2}$.

② Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On pose $A = P_n(\theta) \sin \frac{\theta}{2^n}$. On a $A = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \cos \frac{\theta}{2^3} \dots \cos \frac{\theta}{2^{n-1}} \cos \frac{\theta}{2^n} \sin \frac{\theta}{2^n}$

$$= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \cos \frac{\theta}{2^3} \dots \cos \frac{\theta}{2^{n-1}} \frac{\sin \frac{\theta}{2^{n-1}}}{2},$$

en utilisant la formule de la première question avec $a = \frac{\theta}{2^n}$. On recommence avec $a = \frac{\theta}{2^{n-1}}$, et on obtient

$$A = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \cos \frac{\theta}{2^3} \dots \cos \frac{\theta}{2^{n-2}} \frac{1}{2^2} \left(\sin \frac{\theta}{2^{n-2}} \right).$$

Une récurrence rapide montre que $A = \cos \frac{\theta}{2} \frac{1}{2^{n-1}} \left(\sin \frac{\theta}{2^1} \right) = \frac{1}{2^n} \sin \theta$.

Or comme θ n'est pas un multiple de 2π , $\frac{\theta}{2^n}$ pour n un entier non nul n'est pas un multiple de π , donc $\sin(\theta/2^n) \neq 0$. On divise donc pour obtenir la formule demandée

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad P_n(\theta) = \frac{\sin \theta}{2^n \sin \left(\frac{\theta}{2^n} \right)}.$$

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{-1} = (\sin'(0))^{-1} = 1$, car c'est l'inverse du de la limite du taux d'accroissement de $\sin$ en 0.

④ Soit θ réel fixé non multiple de 2π . On pose $x_n = \frac{\theta}{2^n}$. Lorsque $n \rightarrow +\infty$, alors x_n tend vers 0. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(x_n)/x_n = 1$.

Or $\frac{\sin(x_n)}{x_n} = \frac{2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})}{\theta}$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \sin(\frac{\theta}{2^n}) = \theta$.

On obtient ainsi $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin \theta}{\theta}$.

⑤ Puisque m est pair, $m/2$ est un entier naturel strictement plus petit que m . Par minimalité de m , cet entier $m/2$ peut s'écrire sous la forme $m/2 = 2^i \cdot q$ avec q impair (sinon $m/2$ ferait partie des contre-exemples et serait plus petit que m , ce qui contredit la minimalité).

Alors $m = 2 \cdot (m/2) = 2 \cdot (2^i \cdot q) = 2^{i+1} \cdot q$, avec q impair. Ceci montre que m s'écrit bien sous la forme demandée, ce qui contredit l'hypothèse que m est un contre-exemple.

La propriété est donc bien démontrée par l'absurde.

⑥ On suppose dans cette question qu'il existe un entier $m \neq 0$ tel que $\theta = 2\pi m$.

D'après la question précédente, $\exists i \in \mathbb{N}, \exists q \in 2\mathbb{N} + 1, \quad 2m = 2^i q$, soit $\theta = 2^i q\pi$.

Ainsi, lorsque dans le produit $\prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k}$, l'indice muet k prend la valeur $i+1$, le produit contient le terme

$\cos \left(\frac{q\pi}{2} \right) = 0$ car q est impair. Ainsi, pour $n \geq i+1$, $P_n(\theta) = 0$, et donc, pour tout $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(\theta) = 0$

et $\forall \theta \in 2\pi\mathbb{Z}^*, \frac{\sin \theta}{\theta} = 0$. Il y a encore égalité.

Enfin, si $\theta = 0$, $P_n(\theta) = 1$ et l'autre terme n'existe pas.

⑦ La fonction logarithme exige $\cos(x/2^l) > 0$. Comme $\cos t > 0$ exactement pour $t \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$), la fonction est définie sur l'ensemble

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2^l \left(2k\pi - \frac{\pi}{2} \right), 2^l \left(2k\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

On a alors, pour tout x dans l'ensemble de définition de c ,

$$c'(x) = \frac{d}{dx} \ln(\cos(x/2^l)) = \frac{-\sin(x/2^l) \cdot (1/2^l)}{\cos(x/2^l)} = -\frac{1}{2^l} \tan(x/2^l).$$

Ainsi $c'(x) = -2^{-l} \tan(x/2^l)$.

⑧ Comme $x \in]0, \pi/2[$, alors $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{x}{2^k} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos(x/2^k) > 0$ et $\sin \frac{x}{2^n} > 0$. On peut donc passer au logarithme, en utilisant que le logarithme d'un produit est une somme

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad \sum_{k=1}^n \ln \left(\cos \left(\frac{x}{2^k} \right) \right) = \ln(\sin x) - n \ln 2 - \ln \left(\sin \left(\frac{x}{2^n} \right) \right).$$

Cette égalité de fonction étant égale sur tout un intervalle et que chaque membre est dérivable, on peut dériver, pour obtenir

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{-\cos x}{\sin x} - 0 - \frac{-\cos(\frac{x}{2^n})}{2^n \sin(\frac{x}{2^n})}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = 1$. Alors en passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = -\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{x}$$

⑨ On a $\tan 2a = \tan(a+a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$, pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$.

⑩ Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\theta}{2^k} \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, et donc la tangente est bien définie.

On pose $Q_n(\theta) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \tan^2 \frac{\theta}{2^k}\right)$.

On utilise la formule de la question précédente avec $a = \frac{\theta}{2^n}; \frac{\theta}{2^{n-1}}; \frac{\theta}{2^{n-2}}; \dots; \frac{\theta}{2^2}; \frac{\theta}{2}$, successivement. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{Q_n(\theta)}{\tan(\theta/2^n)} &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \tan^2 \frac{\theta}{2^k}\right) \times \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2^n}}{2 \tan(\theta/2^n)} \times 2 \\ &= \prod_{k=1}^{n-2} \left(1 - \tan^2 \frac{\theta}{2^k}\right) \times \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2^{n-1}}}{2 \tan(\theta/2^{n-1})} \times 2^2 \\ &= \prod_{k=1}^{n-3} \left(1 - \tan^2 \frac{\theta}{2^k}\right) \times \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2^{n-2}}}{2 \tan(\theta/2^{n-2})} \times 2^3 \end{aligned}$$

Par récurrence immédiate, on obtient,

$$Q_n(\theta) = \frac{\tan \theta}{2^n \tan(\frac{\theta}{2^n})}$$

, comme θ n'est pas un multiple de π ,

$\tan \theta \neq 0$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cos x = 1$. On applique ce résultat à $x_n = \theta/2^n$.

Ainsi,
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \tan^2 \frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\theta}{\tan \theta}$$

⑪ On a $\tan p - \tan q = \frac{\sin p}{\cos p} - \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q - \cos p \sin q}{\cos p \cos q} = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$.

⑫ D'après la question précédente, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\tan((k+1)\theta) - \tan(k\theta) = \frac{\sin((k+1)\theta - k\theta)}{\cos((k+1)\theta) \cos(k\theta)} = \frac{\sin \theta}{\cos((k+1)\theta) \cos(k\theta)}$.

En sommant de 1 jusque n , on obtient une somme télescopique. Donc

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos(k\theta) \cos((k+1)\theta)} = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{k=1}^n (\tan((k+1)\theta) - \tan(k\theta)) = \frac{1}{\sin \theta} (\tan((n+1)\theta) - \tan \theta),$$

d'où
$$S_n = \frac{1}{\sin \theta} (\tan((n+1)\theta) - \tan \theta).$$

⑬ D'abord $\cot x - 2 \cot 2x = \frac{\cos x}{\sin x} - 2 \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$.

Or $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, donc $\cot x - 2 \cot 2x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos^2 x - \cos 2x}{\sin x \cos x}$.

Comme $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, on a $\cot x - 2 \cot 2x = \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$.

D'où l'identité simple

$$\cot x - 2 \cot 2x = \tan x.$$

- ⑭ On applique l'identité que l'on vient d'obtenir avec $x = \frac{\alpha}{2^k}$, ce qui donne, $\tan\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) = \cot\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) - 2 \cot\left(\frac{\alpha}{2^{k+1}}\right)$.
 En sommant pour $k = 0, \dots, n$ on obtient une somme télescopique

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^n \left(\cot\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) - 2 \cot\left(\frac{\alpha}{2^{k+1}}\right) + \cot\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) \right) = 2 \sum_{k=0}^n \left(\cot\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) - \cot\left(\frac{\alpha}{2^{k+1}}\right) \right) \\ &= \left(\cot \frac{\alpha}{2^0} - 2 \cot(2\alpha) \right) + \left(\cot \frac{\alpha}{2} - 2 \cot \frac{\alpha}{2^0} \right) + \dots + \left(\cot \frac{\alpha}{2^n} - 2 \cot \frac{\alpha}{2^{n-1}} \right) \\ &= 2 \cot \frac{\alpha}{2^n} - 2 \cot(2\alpha) \end{aligned}$$

d'où

$$T_n = 2 \cot\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - 2 \cot(2\alpha) .$$