

DS 1 : Fiche de calculs

du 17/09/2025

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.

Nom et prénom :

Note :

Donner les réponses sur la feuille sans justification. Vous pouvez utiliser un brouillon.

Durée : 1 heure

LOGIQUE

Donner la négation de $\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x \leq -M \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$.

TRIGONOMETRIE

Primitive de $x \mapsto \cos^4(x) \sin^2(x)$:

On pensera à linéariser l'expression.

Donner l'ensemble des solutions de l'équation $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) > 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On pourra faire apparaître dans le membre de gauche la formule de $\cos(a - b)$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \boxed{}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \boxed{}$$

On pensera à exprimer $\pi/12$ comme différence d'angle avec des valeurs de $\cos$ et $\sin$ connues.

LIMITES

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 2x + 3)}{\sqrt{x}} = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)e^x}{x^2 - 1} = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)} = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 1}{x^3 - 5x + 7} = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2x - 5) \exp(x^{1/4}) \ln(x) = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 5x + 2} + x = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 4x + 3} = \boxed{}$$

RAISONNEMENTS

Résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, $x - 1 = \sqrt{x} + 4$. (Rédaction complète)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

DS 1
 du 17/09/2025

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.
 Faites attention au soin apporté à votre présentation et à la justesse de votre rédaction.
 Durée : 2 heures.

EXERCICE 1: ETUDE DE LA SÉRIE HARMONIQUE _____

Pour tout entier naturel n non nul, on définit

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

On étudie dans ce problème diverses propriétés de la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, nommée aussi série harmonique.

PARTIE A - LIMITE DE LA SÉRIE HARMONIQUE

- ① Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_{n+1} en fonction de H_n . En déduire le sens de variation de la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- ② Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier la quantité $H_{2n} - H_n$, en l'écrivant à l'aide d'un seul symbole Σ .
- ③ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
- ④ En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{2^n} \geq \frac{n}{2} + 1$.
- ⑤ La suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet-elle une limite? Laquelle?

PARTIE B - UNE PROPRIÉTÉ ARITHMÉTIQUE : SI $n \geq 2$, H_n N'EST PAS ENTIER

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, posons la propriété P_n : " Il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $H_n = \frac{2p+1}{2q}$ " .

- ⑥ Montrer que, si $n \geq 2$ est pair, alors $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.
- ⑦ Montrer que si p, q sont deux entiers naturels impairs, et k, ℓ deux entiers naturels quelconques alors $\frac{k}{p} + \frac{\ell}{q}$ peut s'écrire comme un quotient d'entiers dont le dénominateur est impair.
- ⑧ En déduire que, s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m + 1$, alors il existe un nombre rationnel r de dénominateur impair tel que

$$H_{n+1} = \frac{H_{m+1}}{2} + r .$$

On pourra décomposer une somme écrite en fonction de la parité de ses indices.

- ⑨ Montrer finalement par un raisonnement par récurrence que, pour tout $n \geq 2$, P_n est vraie.

EXERCICE 2: UN PRODUIT TRIGONOMETRIQUE

Soit n un entier naturel non nul. On pose, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_n(\theta) = \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k}$.

PARTIE A - SIMPLIFICATION DU PRODUIT ET CALCUL

- ① Linéariser $\sin a \cos a$ pour tout réel a .
- ② En calculant $\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) P_n(\theta)$, montrer que, pour tout réel $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $P_n(\theta) = \frac{\sin \theta}{\sin(\theta/2^n) 2^n}$.
- ③ Donner la valeur de la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$.
- ④ En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$.
- ⑤ Le but de cette question est de montrer que, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ **pair**, il existe $i \in \mathbb{N}$ et un nombre impair $q \in \mathbb{N}$, tel que $m = 2^i q$.
 - ① Supposons qu'il existe un entier pair m_0 qui ne puisse pas s'écrire de la forme $m_0 = 2^i q$, avec q impair. Sans perte de généralité, prenons m_0 le plus petit entier pair avec cette propriété. En considérant $m_0/2$, montrer que l'on arrive à une absurdité.
 - ② Conclure.
- ⑥ Dédurre de la question précédente, que la limite de la question ④ est encore vraie si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}^*$. On pourra montrer que $P_n(\theta)$ est nulle à partir d'un certain rang.

PARTIE B - APPLICATION AU CALCUL D'UNE SOMME

- ⑦ Soit $l \in \mathbb{Z}$. Donner l'ensemble de définition puis dériver la fonction $c : x \mapsto \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^l}\right)\right)$.
- ⑧ En composant la relation obtenue en ② par la fonction logarithme et en dérivant, prouver que

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}.$$

PARTIE C - UN RAISONNEMENT SIMILAIRE

- ⑨ Rappeler, pour $a \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$, la formule de $\tan(2a)$ en fonction de $\tan(a)$.
- ⑩ Adapter le raisonnement de la **PARTIE A** pour montrer que, pour tout θ non multiple de π ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \tan^2 \frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\theta}{\tan \theta}.$$

PARTIE D - ENCORE DEUX SOMMES RESSEMBLANTES

Soit p, q, x, θ, α des réels tels que toutes les expressions suivantes aient un sens.

- ⑪ **Factoriser** $\tan p - \tan q$, en fonction de sinus et cosinus.
- ⑫ En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos(k\theta) \cos((k+1)\theta)}$.
- ⑬ On définit $\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
Montrer que $\cotan x - 2 \cotan 2x$ s'exprime de manière très simple en fonction de $\tan x$.
- ⑭ En déduire une simplification de $T_n = \sum_{k=0}^n \tan\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) + \cotan\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$.