

Exercice 1:

① On peut tirer zéro, une ou deux boules noires,
Donc $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

En utilisant la formule du nombre d'issues favorables

sur le nombre d'issues totaler, on a:

$$P(X=0) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{2}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{8}{15}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{15}$$

On a bien

$$\frac{2}{5} + \frac{8}{15} + \frac{1}{15} = 1$$

② De même, $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= P(Y=0 | X=0) P(X=0) \\ &\quad + P(Y=0 | X=1) P(X=1) \\ &\quad + P(Y=0 | X=2) P(X=2) \\ &= \frac{1}{\binom{4}{2}} \times \frac{2}{5} + \frac{\binom{2}{2}}{6} \times \frac{8}{15} + \frac{\binom{4}{2}}{6} \times \frac{1}{15} \\ &= \frac{1}{15} + \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même, } P(Y=1) &= \frac{2}{5} \times \frac{2 \times 2}{6} + \frac{8}{15} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{15} \times 0 \\ &= \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

$$\text{et } P(Y=2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{8}{15} \times 0 + \frac{1}{15} \times 0$$

$$= \frac{1}{15}$$

③ On a

$$P(X=1 | Y=1) = \frac{P((X=1) \cap (Y=1))}{P(Y=1)}$$

$$= \frac{15}{8} \times P(Y=1 | X=1) \times P(X=1)$$

$$= \frac{15}{8} \times \frac{3}{6} \times \frac{8}{15}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

④ Si on pose A : "Aucune boule noire tirée au premier tirage, puis 2 boules noires au second"

et B : "Tirer une boule noire à chaque tirage",

A ∪ B est l'événement recherché et par incompatibilité,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= P((X=1) \cap (Y=1)) + P((X=0) \cap (Y=2))$$

$$= \frac{3}{6} \times \frac{8}{15} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{5} \quad P(X=1 \cap Y=2) = 0$$

$$\text{Mais} \quad P(X=1) P(Y=2) \neq 0$$

Donc les événements ne sont pas indépendants.

Exercice 2:

① Par calcul, $T_1(1) = 1$ $T_1(3) = 0$ $T_1(5) = 0$
 $T_2(1) = 0$ $T_2(3) = 1$ $T_2(5) = 0$
 $T_3(1) = 0$ $T_3(3) = 0$ $T_3(5) = 1$

② Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{i=1}^3 \lambda_i T_i = 0$.

Alors après évaluation en 1, 3 et 5 on a

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Donc la famille (T_1, T_2, T_3) est libre.

Or son cardinal est 3 comme la dimension de
 $\mathbb{R}_3[x]$, donc elle est libre maximale et
c'est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

③ Par définition, $P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} := \text{Mat}(\text{Id}, \mathcal{C}, \mathcal{B})$

$$= \begin{pmatrix} 15/8 & 5/4 & 3/8 \\ -1 & 6/4 & -4/8 \\ 1/8 & -1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 15 & -10 & 3 \\ -8 & 12 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

④ L est inversible par définition.

De plus, $\det L = \frac{1}{8^3} \begin{vmatrix} 15 & -10 & -12 \\ -8 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{8^3} (4 \times 20 - 12 \times 4)$

$$= \frac{4^2(5-3)}{8^3} = \frac{1}{16}$$

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -10 & 3 \\ -8 & 12 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -10 & 3 \\ -8 & 12 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

5 Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par divisions euclidiennes $\exists Q_1, Q_2, Q \in \mathbb{R}[x],$ tq

$$\begin{cases} P_1 = P_0 Q_1 + \hat{P}_1 \\ P_2 = P_0 Q_2 + \hat{P}_2 \\ \lambda P_1 + P_2 = P_0 Q + (\lambda \hat{P}_1 + \hat{P}_2) \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lambda P_1 + P_2 = P_0 Q + (\lambda \hat{P}_1 + \hat{P}_2) = P_0 (\lambda Q_1 + Q_2) + \lambda \hat{P}_1 + \hat{P}_2$$

$$\text{Donc } \underline{P_0 (Q - \lambda Q_1 - Q_2) = -(\lambda \hat{P}_1 + \hat{P}_2)}$$

Par passage aux degrés, $\deg(P_0 (Q - \lambda Q_1 - Q_2)) \leq 2$

$$\text{Donc } Q - \lambda Q_1 - Q_2 = 0, \text{ donc } \underline{(\lambda \hat{P}_1 + \hat{P}_2) = \lambda \hat{P}_1 + \hat{P}_2}$$

Donc f est linéaire.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{6} \quad \text{Par définition, } \text{Ker } f &= \{ P \in \mathbb{R}[x] \mid \hat{P} = 0 \} \\
 &= \{ Q P_0 \mid Q \in \mathbb{R}[x] \} \\
 &= \underline{P_0 \mathbb{R}[x]}
 \end{aligned}$$

$\textcircled{7}$ Si $P \in \mathbb{R}_2[x]$, alors le quotient de la division euclidienne par P_0 doit être nul pour des raisons de degré. Donc $\underline{P = \hat{P} = f(P)}$.

$$\text{Donc } \underline{\mathbb{R}_2[x] \subset \text{Im } f}$$

Mais dans l'image de f ne se trouvent que des polynômes de degrés inférieurs ou égal à 2, car ce sont les restes d'une division euclidienne par P_0 , avec $\deg P_0 = 3$.

$$\text{Donc } \underline{\mathbb{R}_2[x] = \text{Im } f}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{8} \quad f \circ f(P) &= f(f(P)) = f(P), \text{ pour tout } P \in \mathbb{R}[x] \\
 &\text{car } f(P) \in \mathbb{R}_2[x].
 \end{aligned}$$

Donc $f \circ f = f$ et $\underline{f \text{ est un projecteur sur } \text{Im } f = \mathbb{R}_2[x] \text{ et parallèlement à } P_0 \mathbb{R}[x]}$

⑨ Posons $Q = P(1)T_1 + P(3)T_2 + P(5)T_3$

Alors $Q(1) = P(1)$, $Q(3) = P(3)$ et $Q(5) = P(5)$

Par division euclidienne, $\exists S \in \mathbb{R}[x]$ tq

$$P = P_0 S + \hat{P}$$

Donc $P(1) = P_0(1) S(1) + \hat{P}(1) = \hat{P}(1)$

et de même, $\hat{P}(3) = P(3)$

et $\hat{P}(5) = P(5)$.

Ce qui donne

$$Q(1) = \hat{P}(1), \quad Q(3) = \hat{P}(3), \quad Q(5) = \hat{P}(5)$$

Or $\deg Q, \deg \hat{P} \leq 2$

Donc $\hat{P} = Q$

car tout polynôme de degré 2 avec 3 zéros est nul.

⑩ $L = P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}^{-1}$

$$f(1) = 1 = 1 \times T_1 + 1 \times T_2 + 1 \times T_3 = T_1 + T_2 + T_3$$

et $f(x) = x = 1 \times T_1 + 3 \times T_2 + 5 \times T_3$

et $f(x^2) = x^2 = T_1 + 9 \times T_2 + 25 \times T_3$

Donc $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

11) On a $\deg T_1 = \deg T_2 = \deg T_3 = 2$

Donc $\deg(\Phi(P)) \leq 2$

Donc Φ est bien définie

De plus, pour tout $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda P_1 + P_2)'' T_1 + (\lambda P_1 + P_2)'(0) T_2 + (\lambda P_1 + P_2)(1) T_3$$

$$= \lambda P_1'' T_1 + P_2'' T_1 + \lambda P_1'(0) T_2 + P_2'(0) T_2 + \lambda P_1(1) T_3 + P_2(1) T_3$$

$$= \lambda \Phi(P_1) + \Phi(P_2)$$

Donc Φ est linéaire

12) $A = \text{Mat}(\Phi, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ -1 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lll} \text{car} & T_1'' = 1/4 & T_2'' = -1/2 & T_3'' = 1/4 \\ & T_1'(0) = -1 & T_2'(0) = \frac{3}{2} & T_3'(0) = -\frac{1}{2} \\ & T_1(1) = 1 & T_2(1) = 0 & T_3(1) = 0 \end{array}$$

Φ est bijective si et seulement si
A est inversible.

$$\text{Or } \det A = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} = -\frac{1}{8} \neq 0$$

Donc Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$

⑬ Par la formule de matrice de passage

$$\begin{aligned} \text{Mat}(\Phi, \mathcal{B}) &= P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} A P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} \\ &= L A L^{-1} \\ &= \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 67 & -90 & 35 \\ -72 & 88 & -32 \\ 13 & -14 & 5 \end{pmatrix} L^{-1} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 33 \\ -4 & 8 & -20 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \Phi(ax^2+bx+c) = \frac{1}{16} \left(x^2(c-b+3a) + x(-4c+8b-20a) + 3c-7b+33a \right), \forall a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3:

① On a $\det A_3 = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \neq 0$

Donc A_3 est inversible.

② $A_3 e_i$ donne exactement la i -ème colonne de A_3 , pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$.

Donc $\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = A_3$

De plus, par définition,

$$P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}} = \text{Mat}(\text{Id}, \mathcal{E}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La formule des matrices de passages de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{E}$ donne

$D = P^{-1} A_3 P$

$$(4) \quad D = (P^{-1} A_3) P$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_3^n = (P D P^{-1})^n = P D^n P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1/3^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

(5) "la puce a autant de chance de commencer sur chaque marche de l'escalier" signifie que la position de la puce au départ, c'est à dire, X_0 , suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, m\}$.

Donc
$$P(X_0 = k) = \frac{1}{m}, \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}$$

⑥ Au rang $n \in \mathbb{N}$, la puce saute vers le bas, donc ne peut pas se retravailler sur une marche plus haute.

⑦ Son saut étant choisi uniformément,
$$P(X_{n+1} = k \mid X_n = \ell) = \frac{1}{\ell}, \forall k \leq \ell$$

et
$$P(X_{n+1} = k \mid X_n = \ell) = \underline{0}, \forall k > \ell$$

⑧ D'après la formule des probas totales, appliquée au système complet d'événement $\{(X_n = j) \mid j \in \llbracket 1, m \rrbracket\}$,
pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = i) &= \sum_{j=1}^m P(X_{n+1} = i \mid X_n = j) P(X_n = j) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} P(X_n = j) \end{aligned}$$

⑨ D'après ⑧,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= P(X_n = 1) + \frac{1}{2} P(X_n = 2) + \dots + \frac{1}{m} P(X_n = m) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{m} \end{pmatrix} V_n \\ P(X_{n+1} = 2) &= \frac{1}{2} P(X_n = 2) + \frac{1}{3} P(X_n = 3) + \dots + \frac{1}{m} P(X_n = m) \\ &\quad + 0 \times P(X_n = 1) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{m} \end{pmatrix} V_n. \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{m} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix} V_n = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n P(X_n=j) \times \frac{1}{j} \\ \sum_{j=2}^n P(X_n=j) \times \frac{1}{j} \\ \vdots \\ \frac{1}{m} P(X_n=m) \end{pmatrix}$$

= V_{n+1} d'après la question 8

10 On $V_{n+1} = A_3 V_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = A_3^n V_0$

$$= A_3^n \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2^{-n} \\ 3^{-n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2^{-n} + 3^{-n-1} \\ 2^{-n} - 2 \times 3^{-n-1} \\ 3^{-n-1} \end{pmatrix}$$

11) On sait que $X_0 \sim \mathcal{U}(\mathbb{I}'_1, m\mathbb{I})$, alors

$$\mathbb{E}(X_0) = \sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(X_0 = k) = \frac{m+1}{2}$$

et $\mathbb{E}(X_0^2) = \sum_{k=1}^m k^2 \mathbb{P}(X_0 = k) = \frac{(m+1)(2m+1)}{6}$

12) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(X_{n+1} = k)$$

$$\stackrel{⑧}{=} \sum_{k=1}^m k \sum_{j=k}^m \frac{1}{j} \mathbb{P}(X_n = j)$$

$$= \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} \mathbb{P}(X_n = j) \sum_{k=1}^j k$$

$$= \sum_{j=1}^m \cancel{\frac{1}{j}} \mathbb{P}(X_n = j) \cancel{j} \frac{(j+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^m j \mathbb{P}(X_n = j)}_{= \mathbb{E}(X_n)} + \underbrace{\sum_{j=1}^m \mathbb{P}(X_n = j)}_{= 1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (\mathbb{E}(X_n) + 1)$$

13) Soit $u_n = \mathbb{E}(X_n) - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \mathbb{E}(X_{n+1}) - 1 = \frac{1}{2} (\mathbb{E}(X_n) - 1) = \frac{1}{2} u_n.$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{m-1}{2} + 1$

14) D'après la formule de transfert, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}^2) &= \sum_{k=1}^n k^2 \sum_{j=k}^m \frac{1}{j} \mathbb{P}(X_n = j) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} \mathbb{P}(X_n = j) \sum_{k=1}^j k^2 \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{(j+1)(2j+1)}{6} \mathbb{P}(X_n = j) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{3} \times j^2 \times \mathbb{P}(X_n = j) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} j \mathbb{P}(X_n = j) \\ &\quad + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^m \mathbb{P}(X_n = j) \\ &= \frac{1}{3} \mathbb{E}(X_n^2) + \frac{1}{2} \mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

15) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après (14),

$$3^{n+1} \mathbb{E}(X_{n+1}^2) = 3^n \mathbb{E}(X_n^2) + \frac{3^{n+1}}{2} \mathbb{E}(X_n) + \frac{3^n}{2}$$

d'où, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} \times \frac{m-1}{2} + \frac{3^{n+1}}{2} + \frac{3^n}{2} \\ &= v_n + \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \times \frac{m-1}{2} + 2 \times 3^n \end{aligned}$$

(16) Par télescopage, $\sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k = v_n - v_0$, then.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k$$

$$\stackrel{(15)}{=} v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2 \times 3^k + \frac{m-1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}$$

$$= \frac{(m+1)(2m+1)}{6} + \cancel{2} \times \frac{1-3^n}{\cancel{1-3}} + \frac{m-1}{2} \times \frac{1-(\frac{3}{2})^n}{\cancel{1-\frac{3}{2}}} \times \frac{3}{2}$$

$$= \frac{(m+1)(2m+1)}{6} + 3^n - 1 + (m-1) \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \right) \times \frac{3}{2}$$

$$= \frac{(m+1)(2m+1)}{6} - 1 + (1-m) \frac{3}{2} + 3^n + (m-1) \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}m + 3^n + (m-1) \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$$

(17) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$$

$$= \left(\frac{(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}m \right) \frac{1}{3^n} + 1 + (m-1) \frac{1}{2^{n+1}} - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (m-1) + 1 \right)^2$$
