

DS 10
du 13/05/2026

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.
Faites attention au soin apporté à votre présentation et à la justesse de votre rédaction.
Durée : 4 heures.

EXERCICE 1: TIRAGE DE BOULES

Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires. On effectue au hasard un tirage simultané et sans remise de deux boules de l'urne. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules noires obtenues. Après ce premier tirage, il reste donc quatre boules dans l'urne. On effectue à nouveau au hasard un tirage simultané et sans remise de deux boules de l'urne. On note Y le nombre de boules noires obtenues au second tirage.

- ① Déterminer la loi de X .
- ② En utilisant à chaque fois la formule des probabilités totales, déterminer la loi de Y .
- ③ Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire au premier tirage sachant que l'on a tiré une seule boule noire au second tirage?
- ④ Déterminer la probabilité de l'événement "Il a fallu exactement deux tirages pour extraire les deux boules noires de l'urne".
- ⑤ Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes? Justifier la réponse.

EXERCICE 2: POLYNÔMES ET CHANGEMENTS DE BASES

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par $\mathbb{R}_2[X]$ le sous espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. Par abus de notation, la fonction polynomiale associée à un polynôme Q sera encore notée Q .

PARTIE A - CHANGEMENT DE BASES ET DIVISION EUCLIDIENNE

On pose $T_1(X) = \frac{1}{8}(X-3)(X-5)$, $T_2(X) = \frac{-1}{4}(X-1)(X-5)$, $T_3(X) = \frac{1}{8}(X-1)(X-3)$.

- ① Calculer $T_i(1), T_i(3), T_i(5)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
- ② En déduire que $\mathcal{C} = (T_1, T_2, T_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- ③ Déterminer la matrice L de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.
- ④ Démontrer que L est inversible et calculer son inverse.

On pose le polynôme $P_0(X) = (X-1)(X-3)(X-5)$. Pour tout polynôme $P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$, on note $\hat{P}(X)$ le reste de la division euclidienne de P par P_0 , et f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = \hat{P}$.

- ⑤ Démontrer que f est linéaire.
 Pour $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on écrira les divisions euclidiennes de $\lambda P_1 + P_2$, P_1 et P_2 , par P_0 pour conclure.
- ⑥ Déterminer le noyau de f .
- ⑦ Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = P$, puis en déduire l'image de f .
- ⑧ Comparer $f \circ f$ et f , puis en déduire la particularité de f et en donner les espaces caractéristiques.
- ⑨ Démontrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\hat{P}(X) = P(1)T_1(X) + P(3)T_2(X) + P(5)T_3(X)$.
- ⑩ Retrouver ainsi la matrice inverse de L .

PARTIE B - APPLICATION

$$\text{Soit } \Phi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P''T_1 + P'(0)T_2 + P(1)T_3 \end{array}.$$

- (11) Justifier que Φ est bien définie, et que c'est une application linéaire.
- (12) Donner la matrice de Φ dans la base $\mathcal{C}$. En déduire si Φ est bijective.
- (13) Dédurre de la **PARTIE A**, la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$, puis l'image de $P(X) = a + bX + cX^2$ par Φ , où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

EXERCICE 3: UNE PUCE DESCEND UN ESCALIER

PARTIE A - RÉDUCTION D'UNE MATRICE

$$\text{Soit } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & A_3 X \end{array}.$$

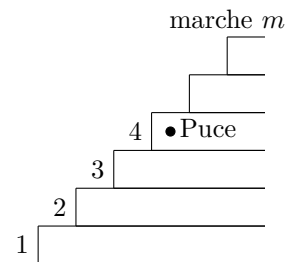
- (1) La matrice A_3 est-elle inversible ?

$$\text{On note } \mathcal{B} := \{e_1, e_2, e_3\} \text{ la base canonique de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (2) Justifier que $A_3 = \text{Mat}(f, \mathcal{B})$ et donner la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$, que l'on notera P .
- (3) Calculer l'inverse de P puis donner la formule qui donne $D := \text{Mat}(f, \mathcal{C})$ en fonction de P et A_3 .
- (4) Calculer D , puis en déduire alors A_3^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

PARTIE B - SUITE DE VARIABLES ALÉATOIRES

Soit m un entier naturel non nul fixé. Un puce descend les marches d'un escalier à m marches, la plus haute marche étant numérotée m et la plus basse 1. On suppose que la puce a autant de chance de commencer sur chaque marche de l'escalier. Ensuite, soit elle saute sur place, soit elle saute vers le bas d'autant de marche qu'elle souhaite, de manière équiprobable. On note X_n la position de la puce au saut n .



- (5) Justifier que X_0 suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, m\}$, et donner la définition d'une telle loi.
- (6) Expliquer pourquoi, pour tout n entier naturel, X_{n+1} suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, X_n\}$.
- (7) Donner $\mathbb{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = l)$ avec $k, l \in \llbracket 1, m \rrbracket$.

- (8) Montrer que pour tout i entre 1 et m , $\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \sum_{j=i}^m \frac{1}{j} \mathbb{P}(X_n = j)$.

$$\text{On note, pour tout } n \text{ entier naturel, } V_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = m) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}).$$

- (9) Traduire la relation de la question (8) par une relation matricielle de la forme $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = AV_n$, où A est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ à préciser.

- ⑩ Dans cette question uniquement, on suppose que $m = 3$.
 En utilisant la **PARTIE A**, calculer, pour tout n entier naturel et tout i entre 1 et 3, $\mathbb{P}(X_n = i)$.

PARTIE C - CALCUL DE L'ESPÉRANCE ET DE LA VARIANCE DE X_n .

Soit $m \in \mathbb{N}$.

- ⑪ Donner la valeur de $\mathbb{E}(X_0)$ et de $\mathbb{E}(X_0^2)$.
 ⑫ En utilisant la question ⑧, montrer que pour tout n entier naturel, $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{1}{2}(1 + \mathbb{E}(X_n))$.
 ⑬ En déduire, pour tout n entier naturel, $\mathbb{E}(X_n)$.
 ⑭ Avec la même méthode que la question ⑫, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_n^2) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{6}$.

On pose, pour tout n entier naturel, $v_n = 3^n \mathbb{E}(X_n^2)$.

- ⑮ Montrer que pour n entier naturel, $v_{n+1} = v_n + 2 \times 3^n + \frac{m-1}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.
 ⑯ En justifiant que pour tout n entier naturel, $v_n = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$, et en utilisant la question précédente, expliciter la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 ⑰ En déduire l'expression de $\mathbb{V}(X_n)$.