

DEVOIR SURVEILLÉ 11

☐0 ☐0☐1 ☐1☐2 ☐2☐3 ☐3☐4 ☐4☐5 ☐5☐6 ☐6

Codez ci-contre, chiffre par chiffre, votre numéro élève, qui est votre place dans l'ordre alphabétique en base 7, puis donnez vos noms et prénoms ci-dessous.

NOM - Prénom :

DURÉE : 2 HEURES

EXERCICE 1 : QUELQUES EXEMPLES

- ① Étudier la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$.

☐0 ☐0.5 ☐1 ☐1.5 ☐2

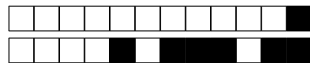
On a

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{(-1)^n}{1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \times (-1)^n \times \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)$$
$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, par critère des séries alternées
 $\sum \frac{1}{n}$ diverge, comme série de Riemann
 $\sum \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge, par comparaison à une série de Riemann convergente.

Donc, par somme de séries convergentes et

d'une série divergente, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$ diverge



- ② Étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2

On a, pour tout $n \geq 2$,

$$\ln(n)^{\ln(n)} = \exp(\ln(n) \ln(\ln(n))) \\ = n^{\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}}$$

or, par composée de limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\ln(n)) = +\infty$$

Donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \ln(\ln(n)) \geq 2$

$$\text{D'où } \ln(n)^{\ln(n)} \geq n^2$$

et donc par comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum \ln(n)^{-\ln(n)}$ converge.

- ③ Montrer la divergence de $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2

$$\text{On a } \frac{n}{n^{1+\frac{1}{n}}} = n^{-\frac{1}{n}} = \exp\left(-\frac{1}{n} \ln(n)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

par croissances comparées.

Donc $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$, donc par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \text{ diverge}$$

- ④ Étudier la nature de la série $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n^\alpha + 1}}$, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2

la série est à termes positifs, et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
 $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n^\alpha + 1}} \times \frac{n^{\alpha/2}}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ | $\sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{n^\alpha + 1}}$ et $\sum u_{n,\alpha}$ sont alors
 Donc $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n^\alpha + 1}} \sim \frac{\ln(n)}{n^{\alpha/2}} =: u_{n,\alpha}$ | de même nature par
 comparaison
 Si $\alpha \leq 2$: $u_{n,\alpha} \geq \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ donc diverge par
 comparaison à une série de Riemann divergente.
 Si $\alpha > 2$: $u_{n,\alpha} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2}}} \times \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2}}}$
 avec $\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2} > 0$ et $\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2} > 1$
 Comme $\frac{\ln(n)}{n^{\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par croissances comparées,
 Alors $\frac{\ln(n)}{n^{\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2}}} < 1$ à partir d'un rang, donc $u_{n,\alpha} < \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2}}}$
 donc converge, par comparaison à une série de
 Riemann convergente.

- ⑤ Montrer que $\pi \sqrt{n^2 + (-1)^n} \underset{+ \infty}{=} \pi n + \frac{\pi(-1)^n}{2n} - \frac{\pi}{8n^3} + o(n^{-3})$, puis en déduire la nature de la série $\sum (-1)^n \sin(\pi \sqrt{n^2 + (-1)^n})$.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

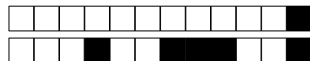
$$\pi \sqrt{n^2 + (-1)^n} = \pi n \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \pi n \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n^2} - \frac{1}{8n^4} + o(n^{-4}) \right)$$

$$= \pi n + \frac{(-1)^n \pi}{2n} - \frac{\pi}{8n^3} + o(n^{-3})$$

Donc
$$(-1)^n \sin(\pi \sqrt{n^2 + (-1)^n}) = \sin\left(\frac{(-1)^n \pi}{2n} + o(n^{-2})\right)$$

$$= \frac{(-1)^n \pi}{2n} + o(n^{-2})$$

Par somme de séries convergentes, dont les
 justifications ont été données précédemment,
 la série converge.



EXERCICE 2 : RÈGLE DE D'ALEMBERT

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs strictement positives (ou au moins à partir d'un certain rang) telle que $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

① Supposons $\ell < 1$.

(a) En utilisant la définition de limite pour la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ et $N \in \mathbb{N}$, tels que $\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha$.

(b) En déduire par récurrence qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, tels que $\forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq u_N \alpha^{n-N}$.

(c) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans ces conditions.

Σ

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2

① $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| < \varepsilon$

Prenons ε tq. $\alpha := \ell + \varepsilon < 1$.

Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon < 1, \forall n \geq N$

② $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$, par hypothèse.

Pour $n = N$: $u_N \leq u_N \alpha^{n-N}$

Fixons $n \geq N$ tel que $u_n \leq u_N \alpha^{n-N}$

Alors $u_{n+1} \leq u_n \alpha \leq u_N \alpha^{n+1-N}$

D'où l'hérédité

La propriété est donc démontrée par récurrence.

③ Par comparaison à une série géométrique divergente, Σu_n converge



- ② Proposer une démonstration similaire, que l'on acceptera plus succincte, qui démontre que si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ est une série grossièrement divergente.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2

Par $\ell > 1$, on trouve $\alpha > 1$ tq

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \alpha, \text{ à partir d'un certain rang.}$$

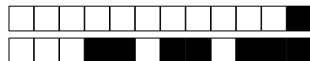
Donc, on montre par récurrence que

$$\forall n \geq N, \quad u_n \geq u_N \alpha^{n-N}$$

ce qui prouve la divergence de $\sum u_n$

par comparaison à une série géométrique

divergente.



- ③ En utilisant les séries de Riemann de termes généraux $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$, montrer que l'on ne peut rien dire, quant à la nature de la série $\sum u_n$, si $\ell = 1$.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$

pourtant, $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

- ④ **Application.** Étudier la nature de la série numérique de terme général $u_n = \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$, en fonction des valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^{2d}}{(2n+2)(2n+1)} \sim \frac{n^{2d-2}}{4}$

Donc si $d > 1$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc la série diverge.

si $d \leq 1$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1/4 & \text{si } d=1 \\ 0 & \text{si } d < 1 \end{cases}$

Donc la série converge



EXERCICE 3 : COMPARAISON DES RESTES DE SÉRIES CONVERGENTES

PARTIE A

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites réelles.

On pose $A_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $B_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est **positive** et que $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On suppose $b_n \neq 0$

- ① Montrer que si $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b_n)$, alors $A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(B_n)$.

On pourra montrer la définition de limite pour la suite $\left(\frac{A_n}{B_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2

Soit $\varepsilon > 0$. On a, par définition, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$

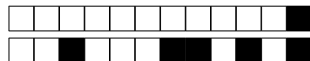
$$a_n \leq \varepsilon b_n.$$

En sommant, pour $n \geq N$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$

$$\text{D'où } \forall n \geq N, \quad A_n \leq \varepsilon B_n.$$

Cela montre le résultat voulu.



- ② En déduire que si $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$, alors $A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B_n$.

En effet, on peut utiliser le ①, puisque $a_n - b_n$ est négligeable devant....

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2

Par définition de l'équivalence,

$$\frac{a_n}{b_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0, \text{ d'où } \underline{a_n - b_n = o(b_n)}$$

Donc d'après ①, $A_n - B_n = o(b_n)$

Donc $\frac{A_n}{B_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$

D'où $\underline{A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B_n}$

PARTIE B

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n$.

- ③ Trouver un équivalent de $u_n - u_{n-1}$ en $+\infty$.

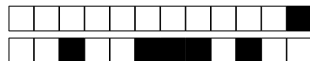
☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2

$\forall n > 2, \quad u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1)$

$$= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{n}} + \left(\cancel{-\frac{1}{n}}\right) + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'où $\underline{u_n - u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}}$



- ④ En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons γ sa limite.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2

Par comparaison à une série de Riemann
convergente, $\sum_{n \geq 2} u_n - u_{n-1}$ converge
Or $u_N = \sum_{n=2}^N u_n - u_{n-1}$, par télescopage.
Donc (u_n) converge

- ⑤ En utilisant un comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2

Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$,
 $\forall k \geq 2$,
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$$

En sommant sur $k \in [n+1, N]$.

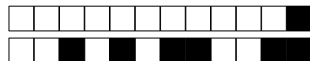
$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \int_n^N \frac{1}{t^2} dt$$

$$\text{Donc } \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(N+1)} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$$

$$\text{D'où } \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$$

On obtient donc l'équivalence,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$



22: 06

- ⑥ Déduire des questions précédentes un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - u_{k-1})$ en $+\infty$.

On pourra en particulier utiliser la PARTIE A .

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2

On a $u_k - u_{k-1} \underset{+ \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$

Donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - u_{k-1}) \underset{+ \infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} \underset{+ \infty}{\sim} \frac{1}{2} \times \frac{1}{n}$

- ⑦ Conclure que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2

En $+\infty$, on a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n - u_{n-1}$

$= \gamma - u_n$

Donc d'après la question précédente,

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma - \ln(n) \underset{+ \infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

D'où $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$