

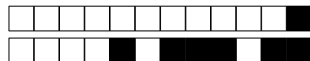
☐	0	☐	0
☐	1	☐	1
☐	2	☐	2
☐	3	☐	3
☐	4	☐	4
☐	5	☐	5
☐	6	☐	6

NOM - Prénom :

① Étudier la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2 ☐ 2.5 ☐ 3

[illegible]



- ② Étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2 ☐ 2.5 ☐ 3

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- ③ Montrer la divergence de $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1

.....

.....

.....

.....

.....

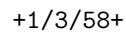
.....

.....

.....

.....

.....



☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2 ☐ 2.5 ☐ 3 ☐ 3.5 ☐ 4

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

EXERCICE 2 : RÈGLE DE D'ALEMBERT

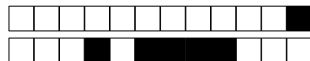
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs strictement positives (ou au moins à partir d'un certain rang) telle que $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

- ① Supposons $\ell < 1$.
 - Ⓐ En utilisant la définition de limite pour la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ et $N \in \mathbb{N}$, tels que $\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha$.
 - Ⓑ En déduire par récurrence qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, tels que $\forall n \geq N, \quad 0 \leq u_n \leq u_N \alpha^{n-N}$.
 - Ⓒ Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans ces conditions.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2 ☐ 2.5 ☐ 3

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There is a vertical margin line on the left side, creating a narrow left margin. The paper appears to be from a notebook or a standard ruled document.

Une démonstration similaire montrerait que si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ est une série grossièrement divergente.



- ② En utilisant les séries de Riemann de termes généraux $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$, montrer que l'on ne peut rien dire, quant à la nature de la série $\sum u_n$, si $\ell = 1$.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- ③ **Application.** Étudier la nature de la série numérique de terme général $u_n = \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$, en fonction des valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2 ☐ 2.5 ☐ 3

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

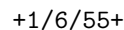
.....

.....

.....

.....

.....





- ② En déduire que si $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$, alors $A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B_n$.

En effet, on peut utiliser le ①, puisque $a_n - b_n$ est négligeable devant....

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

PARTIE B

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n$.

- ③ Trouver un équivalent de $u_n - u_{n-1}$ en $+\infty$.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1

.....

.....

.....

.....

.....

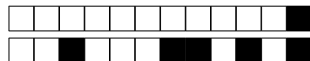
.....

.....

.....

.....

.....



- ④ En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons γ sa limite.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1

.....

.....

.....

.....

.....

- ⑤ En utilisant un comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2 ☐ 2.5 ☐ 3

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



- ⑥ Déduire des questions précédentes un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - u_{k-1})$ en $+\infty$.

On pourra en particulier utiliser la PARTIE A .

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- ⑦ Conclure que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....