

DS 2

du 31/10/2025

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.

CORRECTION

Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner la forme algébrique des nombres suivants, si besoin, en fonction de $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$,

$\frac{(3+5i)^2}{1-2i} =$	$\frac{-76-2i}{5}$	$(1-i)\overline{(1+i)} =$	$-2i$	$\frac{iz}{\bar{z}} =$	$\frac{-2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} + i\frac{\operatorname{Re}(z)^2 - \operatorname{Im}(z)^2}{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$
$(1+i)^5 =$	$-4-4i$	$\frac{(1+i)^{2000}}{(i-\sqrt{3})^{1000}} =$	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}} =$	$0 + \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}i$

Donner les solutions de l'équation de degré 2, $iz^2 + (4i-3)z + i-5 = 0$.

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = (4i-3)^2 - 4i(i-5) = -4i-3$.
On en cherche une racine carrée sous la forme $\delta = a + ib$.

Calculant δ^2 , et utilisant aussi la relation $|\delta^2| = |-4i-3| = 5$. On trouve le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

On en déduit que $\delta = 1 - 2i$ est solution de $\delta^2 = \Delta$ (l'autre solution est $-1 + 2i$).

Utilisant les formules du cours, les racines de l'équation initiale sont donc

$$\frac{-4i+3+1-2i}{2i} = -3-2i \quad \text{et} \quad \frac{-4i+3-1+2i}{2i} = -1-i.$$

Résoudre, en expliquant la démarche, l'équation $z^5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}$.

On a
$$\frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2} = \frac{2^4 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4}{2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2^3 \frac{e^{i\frac{\pi}{3} \times 4}}{e^{i\frac{\pi}{4} \times 2}}.$$

L'équation qu'on doit résoudre est donc $z^5 = 2^3 e^{i\frac{5\pi}{6}} \iff \left(\frac{z}{2^{3/5} e^{i\pi/6}}\right)^5 = 1.$

On en déduit que les solutions sont les complexes de la forme $z = 2^{3/5} e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5})}$, avec $k \in \{0, \dots, 4\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre, en expliquant la démarche, l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$.

Remarquons d'abord que $z = i$ n'est pas solution de l'équation. Ainsi, l'équation est équivalente à $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1$.

Ceci est équivalent à dire qu'il existe $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $\frac{z+i}{z-i} = e^{2ik\pi/n}$.

L'équation $\frac{z+i}{z-i} = 1$ n'a pas de solutions.

Sinon, pour $k = 1, \dots, n-1$, on obtient les solutions $z_k = i \frac{e^{2ik\pi/n} + 1}{e^{2ik\pi/n} - 1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner les solutions de l'équation $e^{2z} = 1 + i\sqrt{3}$.

$$z = \frac{1}{2} \ln 2 + i \left(\frac{\pi}{6} + k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(ky)$, pour tout $y \in \mathbb{R}$. On passe à la partie réelle et "binôme".

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(ky) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{iky} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{iy})^k 1^{n-k} \right) = \operatorname{Re} \left((1 + e^{iy})^n \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{iny/2} (e^{-iy/2} + e^{iy/2})^n \right) = \operatorname{Re} \left(e^{iny/2} (2 \cos(y/2))^n \right) = 2^n \cos(ny/2) \cos^n(y/2) \end{aligned}$$

Donner les solutions des systèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ x - y + t = -1 \\ x + y + z - t = 0 \\ -x + z + t = 2 \end{array} \right. \quad (x, y, z, t) = \left(-\frac{4}{7}, \frac{12}{7}, \frac{1}{7}, \frac{9}{7} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} 3y + 2z = -1 \\ -2x - 2y + 2z = 2 \\ -x - 4y - z = 2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (x, y, z) = -\left(\frac{3+5t}{2}, t, -\frac{1+3t}{2} \right), \\ \text{avec } t \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Linéariser $\sin^3(x) \cos^3(x) =$

$$\frac{1}{32} (-\sin(6x) + 3 \sin(2x))$$

EXERCICE 1: UNE ÉQUATION COMPLEXE

- ① $\Leftarrow$ Si Z est un réel, alors $Z + \frac{1}{Z}$ est naturellement un réel. Si $|Z| = 1$, alors $\frac{1}{Z} = \bar{Z}$ et donc $Z + \frac{1}{Z} = Z + \bar{Z} = 2\operatorname{Re}(Z) \in \mathbb{R}$. Ainsi, si Z est un réel ou est de module 1, alors $Z + \frac{1}{Z}$ est un réel.
 $\Rightarrow$ Réciproquement, si $Z + \frac{1}{Z}$ est un réel, alors

$$Z + \frac{\bar{Z}}{Z\bar{Z}} = Z + \frac{1}{Z} = \overline{Z + \frac{1}{Z}} = \bar{Z} + \frac{1}{\bar{Z}} = \bar{Z} + \frac{Z}{Z\bar{Z}}.$$

Ainsi,

$$Z - \bar{Z} + \frac{\bar{Z}}{Z\bar{Z}} - \frac{Z}{Z\bar{Z}} = 0$$

ce qui donne, en multipliant par $|Z|^2 = Z\bar{Z}$,

$$Z^2\bar{Z} - Z\bar{Z}^2 + \bar{Z} - Z = 0$$

On reconnaît le développement de

$$(Z\bar{Z} - 1)(Z - \bar{Z}) = 0$$

On en déduit que $|Z|^2 = Z\bar{Z} = 1$, donc que $|Z| = 1$, ou bien que $Z = \bar{Z}$, donc que $Z \in \mathbb{R}$. On a donc bien montré que si $Z + \frac{1}{Z}$ est un réel, alors Z est un réel ou est de module 1.

Ainsi, $Z + \frac{1}{Z}$ est un réel si et seulement si Z est un réel ou est de module 1.

- ② La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, si $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}.$$

Comme f est impaire, il suffit d'étudier la fonction sur $]0, +\infty[$. On peut alors dresser le tableau de signes/variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+
$x + 1$	+		+
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	2	$+\infty$

Le tableau nous montre que $x \mapsto |x + \frac{1}{x}|$ a pour minimum 2 sur $\mathbb{R}^*$ et l'atteint en 1 et -1.

- ③ z_1 et z_2 sont les uniques racines sur $\mathbb{C}$ de la fonction polynomiale $z \mapsto (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2$. De plus, on sait que tout polynôme de degré 2 à coefficients complexes admet soit deux racines distinctes, soit

une racine double. Ainsi, on a

$$a = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

et

$$b = z_1z_2.$$

- ④ Soit θ_1 et θ_2 des arguments de z_1 et z_2 , i.e, $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$. Alors,

$$a = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{|z_1|}{2} (e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}) = |z_1| e^{i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} \times \frac{e^{i\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}} + e^{-i\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}}}{2}$$

donc, par les formules d'Euler,

$$a = |z_1| \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}.$$

De plus, $b = |z_1|^2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ donc

$$\frac{a^2}{b} = \cos^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right).$$

⑤ On obtient alors $\frac{a^2}{b} \in \mathbb{R}$ et $\frac{a^2}{b} \in [0, 1]$. Or, $a \neq 0$ et $b \neq 0$, donc $\frac{a^2}{b} \in]0, 1]$.

⑥ Si $\frac{a^2}{b} \in \mathbb{R}$, on sait que chacune des racines est non nulle (sinon, $b = 0$). On peut donc poser $Z = \frac{z_1}{z_2}$ et remarque que $Z \neq 0$, donc la quantité $Z + \frac{1}{Z}$ existe.

$$\begin{aligned} \text{Alors, } Z + \frac{1}{Z} &= \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \\ &= \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} \\ &= \frac{z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2 - 2z_1 z_2}{z_1 z_2} \\ &= \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} - 2 \\ &= \frac{4a^2}{b} - 2 \end{aligned}$$

D'où $Z + \frac{1}{Z} \in \mathbb{R}$.

⑦ Supposons $\frac{a^2}{b} \in \mathbb{R}$ et $\frac{a^2}{b} \in]0, 1]$. Ainsi, d'après la première question, $Z \in \mathbb{R}$ ou $|Z| = 1$.

Or, on sait que $0 < \frac{a^2}{b} \leq 1$, donc, si $Z \in \mathbb{R}$, nous avons $Z + \frac{1}{Z} = \frac{4a^2}{b} - 2$, d'où l'on tire $-2 < Z + \frac{1}{Z} \leq 2$. D'après l'étude de f réalisée précédemment, $Z = 1 = |Z|$.

On en déduit donc que $|Z| = 1$, donc $|z_1| = |z_2|$.

⑧ Soit x et y deux réels strictement positifs. Alors, $0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y$.

Donc $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

⑨ Soit θ un argument de z_1 , i.e, $z_1 = |z_1|e^{i\theta}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta}$. On a alors

$$a = \frac{|z_1|e^{i\theta} + |z_2|e^{i\theta}}{2} = \frac{|z_1| + |z_2|}{2}e^{i\theta} \quad \text{et} \quad b = |z_1 z_2|e^{2i\theta}.$$

On en déduit alors que

$$\frac{b}{a^2} = \frac{4|z_1 z_2|}{(|z_1| + |z_2|)^2}.$$

⑩ D'après ce qui précède, on obtient $\frac{b}{a^2} \in \mathbb{R}$, que c'est une quantité positive et, comme a et b sont tous les deux non nuls, qu'elle est non nulle. Par l'inégalité arithmético-géométrique (appliquée aux réels positifs $|z_1|$ et $|z_2|$, puis mise au carré), on obtient $|z_1 z_2| \leq \frac{(|z_1| + |z_2|)^2}{4}$, ce qui permet bien de conclure à $\frac{b}{a^2} \in]0, 1]$.

⑪ Réciproquement, si $\frac{b}{a^2} \in \mathbb{R}$ et $\frac{b}{a^2} \in]0, 1]$, en posant $Z = \frac{z_1}{z_2}$ et en reprenant le calcul réalisé dans la question ⑥, on obtient que $Z + \frac{1}{Z} = \frac{4a^2}{b} - 2 \in \mathbb{R}$. Ainsi, d'après la première question, $Z \in \mathbb{R}$ ou $|Z| = 1$.

Supposons que $|Z| = 1$, soit que $|z_1| = |z_2|$. D'après la partie précédente, on a que $\frac{a^2}{b} \leq 1$, donc $\frac{b}{a^2} \geq 1$, donc $\frac{b}{a^2} = 1$. En reprenant les notations de la question précédente, on en déduit que $\cos^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) = 1$.

- Si $\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) = 1$, alors $\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = 0[2\pi]$, donc $\theta_1 = \theta_2[4\pi]$, donc $\theta_1 = \theta_2[2\pi]$.

- Si $\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) = -1$, alors $\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = -\pi[2\pi]$, donc $\theta_1 = \theta_2 - 2\pi[4\pi]$, donc $\theta_1 = \theta_2[2\pi]$.

Ainsi, si $|Z| = 1$, on a bien $\arg(z_1) = \arg(z_2)[2\pi]$. Sinon, supposons que $Z \in \mathbb{R}$, on sait de plus que $\frac{a^2}{b} \geq 1$, donc $Z + \frac{1}{Z} = \frac{4a^2}{b} - 2 > -2$ donc, d'après l'étude de f , $Z > 0$.

On en déduit donc que $\arg(Z) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = 0[2\pi]$.

On a donc bien montré que $\arg(z_1) = \arg(z_2)[2\pi]$.

EXERCICE 2: DEUX INÉGALITÉS

- ① On a $\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} = \frac{1}{\bar{a}} - \frac{1}{\bar{b}} = \overline{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$.

On sait que, pour tout nombre complexe z , on a $|\bar{z}| = |z|$ et $|-z| = |z|$. On obtient donc

$$\left| \frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right| = \left| \frac{1}{\bar{a}} - \frac{1}{\bar{b}} \right| = \left| \frac{b-a}{ab} \right| = \frac{|b-a|}{|b||a|} = \frac{|a-b|}{|b||a|}.$$

- ② Voir cours.

- ③ Cette dernière inégalité résulte de l'inégalité triangulaire.

En effet, on a $\left| \frac{y}{|y|^2} - \frac{z}{|z|^2} \right| = \left| \frac{z}{|z|^2} - \frac{y}{|y|^2} \right| = \left| \left(\frac{z}{|z|^2} - \frac{x}{|x|^2} \right) + \left(\frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2} \right) \right|$

$$\leq \left| \frac{z}{|z|^2} - \frac{x}{|x|^2} \right| + \left| \frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2} \right|.$$

- ④ Si x, y et z sont différents de 0, alors l'inégalité demandée est équivalente à $\frac{|y-z|}{|y||z|} \leq \frac{|z-x|}{|z||x|} + \frac{|x-y|}{|x||y|}$, c'est-à-dire, d'après la question ①, à $\left| \frac{y}{|y|^2} - \frac{z}{|z|^2} \right| \leq \left| \frac{z}{|z|^2} - \frac{x}{|x|^2} \right| + \left| \frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2} \right|$, ce qui est exactement l'inégalité que l'on vient de démontrer.

- ⑤ Si $x = 0$, l'inégalité à démontrer est évidente, car le membre de gauche est nul et le membre de droite positif.

Si $y = 0$ ou $z = 0$, l'inégalité est une égalité.

Sinon, on pose $X = x - y, Y = x - z$ et $Z = x - w$.

On a alors, d'après la question ③, $|X||Y - Z| \leq |Y||Z - X| + |Z||X - Y|$, ce qui équivaut à

$$|x - y| \cdot |w - z| \leq |x - z| \cdot |y - w| + |x - w| \cdot |z - y|$$

qui est l'inégalité demandée.

- ⑥ On a $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$
- $$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_2 + z_3)(\bar{z}_2 + \bar{z}_3) + (z_3 + z_1)(\bar{z}_3 + \bar{z}_1)$$
- $$= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 2|z_3|^2$$
- $$+ z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_3$$
- $$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + (z_1 + z_2 + z_3)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3)$$
- $$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2.$$

- ⑦ On a

$$|z_1 + z_2| \times |z_2 + z_3| = |z_2(z_1 + z_2 + z_3) + z_1z_3|$$

et, en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|z_1 + z_2| \times |z_2 + z_3| \leq |z_2| \times |z_1 + z_2 + z_3| + |z_1z_3|$$

- ⑧ De même,

$$|z_2 + z_3| \times |z_3 + z_1| \leq |z_3| \times |z_1 + z_2 + z_3| + |z_2z_1|$$

$$|z_3 + z_1| \times |z_1 + z_2| \leq |z_1| \times |z_1 + z_2 + z_3| + |z_3z_2|$$

En multipliant ces trois inégalités par 2 et en les additionnant membre à membre avec l'égalité trouvée à la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned} & (|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1|)^2 \\ & \leq (|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3|)^2 \end{aligned}$$

Les quantités dans les parenthèses étant positives, on en déduit que

$$|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3|$$

EXERCICE 3: TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE

- ① Voir cours.
- ② C'est une somme géométrique. Si $\omega^{-p} = 1$, c'est-à-dire si n divise p , alors chaque terme vaut 1 et la somme vaut n .
Si $\omega^{-p} \neq 1$, la somme vaut

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-pk} = \frac{1 - \omega^{-pn}}{1 - \omega^{-p}} = \frac{1 - 1}{1 - \omega^{-p}} = 0$$

Donc,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-pk} = \begin{cases} n & \text{si } n \mid p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- ③ Soit $p \in \mathbb{Z}$. De même, $\sqrt{n} \hat{g}(p) = \sum_{k=0}^{n-1} g(k) \omega^{-pk} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-\frac{2ikp\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i(1-p)\pi}{n}} \right)^k = \begin{cases} n & \text{si } n \mid (p-1) \\ \frac{1 - e^{\frac{2i(1-p)\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2i(1-p)\pi}{n}}} & \text{sinon.} \end{cases}$

D'où

$$\hat{g}(p) = \begin{cases} n & \text{si } n \mid (p-1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ④ Par définition, $\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \omega^{-pk}$,

donc $|\hat{f}(p)|^2 = \hat{f}(p) \overline{\hat{f}(p)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \omega^{-pk} \right) \left(\sum_{l=0}^{n-1} \overline{f(l) \omega^{-pl}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} f(k) \overline{f(l)} \omega^{-pk} \omega^{pl}$. On réécrit en

double somme, et on obtient

$$|\hat{f}(p)|^2 = \frac{1}{n} \sum_{0 \leq k, l \leq n-1} f(k) \overline{f(l)} \omega^{(l-k)p}.$$

- ⑤ Sommons l'identité précédente sur $p = 0, \dots, n-1$. On utilise l'égalité de la question ②)

$$\sum_{p=0}^{n-1} \omega^{(l-k)p} = \begin{cases} n & \text{si } l = k \\ 0 & \text{si } l \neq k \end{cases}$$

$$\text{D'où } \sum_{p=0}^{n-1} |\hat{f}(p)|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k,l} f(k) \overline{f(l)} \sum_{p=0}^{n-1} \omega^{(l-k)p} = \frac{1}{n} \sum_k f(k) \overline{f(k)} n = \sum_{k=0}^{n-1} |f(k)|^2.$$

C'est la formule de Parseval

$$\sum_{p=0}^{n-1} |\hat{f}(p)|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |f(k)|^2.$$

- ⑥ On écrit l'expression donnée et on remplace $\hat{f}(p)$ par sa définition

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=0}^{n-1} \hat{f}(p) \omega^{pk} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} f(j) \omega^{-pj} \right) \omega^{pk} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(j) \sum_{p=0}^{n-1} \omega^{p(k-j)}.$$

La somme intérieure vaut n si $k = j$ et 0 sinon (voir question ②), donc le tout vaut $f(k)$.

Ainsi

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=0}^{n-1} \hat{f}(p) \omega^{pk}, \quad k = 0, \dots, n-1 .$$