

DS 2 : Fiche de calculs

du 1/10/2025

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.

Nom et prénom :

Note :

Donner les réponses sur la feuille sans justification. Vous pouvez utiliser un brouillon.

Durée : 1 heure

Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner la forme algébrique des nombres suivants, si besoin, en fonction de $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$,

$$\frac{(3+5i)^2}{1-2i} =$$

$$(1-i)\overline{(1+i)} =$$

$$\frac{iz}{\bar{z}} =$$

$$(1+i)^5 =$$

$$\frac{(1+i)^{2000}}{(i-\sqrt{3})^{1000}} =$$

$$\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}} =$$

Donner les solutions de l'équation de degré 2, $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$.

Donner les solutions de l'équation $e^{2z} = 1 + i\sqrt{3}$.

Résoudre, en expliquant la démarche, l'équation $z^5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre, en expliquant la démarche, l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(ky)$, pour tout $y \in \mathbb{R}$. *On passe à la partie réelle et "binôme".*

Donner les solutions des systèmes

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+t=-1 \\ x+y+z-t=0 \\ -x+z+t=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y+2z=-1 \\ -2x-2y+2z=2 \\ -x-4y-z=2 \end{cases}$$

Linéariser $\sin^3(x) \cos^3(x) =$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(ky)$, pour tout $y \in \mathbb{R}$. *On passe à la partie réelle et "binôme".*

DS 2

du 1/10/2025

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.
Faites attention au soin apporté à votre présentation et à la justesse de votre rédaction.
Durée : 3 heures.

EXERCICE 1: UNE ÉQUATION COMPLEXE

PARTIE A - RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

- ① Soit Z , un complexe non nul. Prouver l'équivalence $\left(Z + \frac{1}{Z} \text{ est un réel}\right) \Leftrightarrow (Z \text{ est un réel ou } |Z| = 1)$.
- ② On considère la fonction (réelle) f définie par $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$. Préciser son domaine de définition et y étudier ses variations. En conclure que la quantité $|x + \frac{1}{x}|$ possède, pour $x \in \mathbb{R}^*$, un minimum que l'on calculera.

Dans la suite de l'exercice, a et b désignent deux nombres complexes non nuls et (E) désigne l'équation

$$z^2 - 2az + b = 0. \quad (\text{E})$$

On note z_1 et z_2 les racines complexes, éventuellement égales, de (E).

PARTIE B - UNE CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QUE $|z_1| = |z_2|$

- ③ Rappeler et démontrer les liens existants entre les quantités $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$, et les coefficients a et b .
- ④ On suppose que $|z_1| = |z_2|$.
 Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle puis en déduire la forme exponentielle de $\frac{a^2}{b}$.
- ⑤ Conclure que, si $|z_1| = |z_2|$, alors la quantité $\frac{a^2}{b}$ est réelle et appartient à l'intervalle $]0, 1]$.
- ⑥ Montrer que, si la quantité $\frac{a^2}{b}$ est réelle, alors avec $Z = \frac{z_1}{z_2}$, la quantité $Z + \frac{1}{Z}$ existe et est réelle.
- ⑦ En conclure que, si $\frac{a^2}{b} \in]0, 1]$, alors $|z_1| = |z_2|$.

PARTIE C - UNE CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QUE $\arg(z_1) = \arg(z_2) [2\pi]$

- ⑧ Démontrer l'inégalité suivante, appelée inégalité arithmético-géométrique,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

- ⑨ On suppose que $\arg(z_1) = \arg(z_2) [2\pi]$.
 Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle puis en déduire la forme exponentielle de $\frac{b}{a^2}$.
- ⑩ Montrer que, si $\arg(z_1) = \arg(z_2) [2\pi]$, alors la quantité $\frac{b}{a^2}$ est réelle et appartient à l'intervalle $]0, 1]$.
- ⑪ Montrer réciproquement que si $\frac{b}{a^2} \in]0, 1]$, alors $\arg(z_1) = \arg(z_2) [2\pi]$.

EXERCICE 2: DEUX INÉGALITÉS**PARTIE A - INÉGALITÉ DE PTOLÉMÉE**

- ① Montrer que, pour tout $(a, b) \in (\mathbb{C}^*)^2$, $\left| \frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right| = \frac{|a-b|}{|a||b|}$.
- ② Rappeler l'inégalité triangulaire pour deux complexes z_1 et z_2 .
- ③ Montrer que, pour tout $(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3$, $\left| \frac{y}{|y|^2} - \frac{z}{|z|^2} \right| \leq \left| \frac{z}{|z|^2} - \frac{x}{|x|^2} \right| + \left| \frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2} \right|$.
- ④ En déduire que, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, $|x| \cdot |y-z| \leq |y| \cdot |z-x| + |z| \cdot |x-y|$.
- ⑤ En déduire enfin, pour $(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4$, l'inégalité de Ptolémée,

$$|x-y| \cdot |z-w| \leq |x-z| \cdot |y-w| + |x-w| \cdot |y-z|.$$

PARTIE B - INÉGALITÉ DE HLAWKA

- ⑥ Démontrer que, pour tout $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$,
- $$|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2.$$
- ⑦ Montrer, en utilisant ②, que, pour tout $x, y, z \in \mathbb{C}$, $|x+y| \times |y+z| \leq |y| \times |x+y+z| + |xz|$.
- ⑧ En déduire l'inégalité de Hlawka, pour tout $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$,

$$|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3| \geq |z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1|$$

EXERCICE 3: TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

On associe à toute fonction $f : \llbracket 0, n-1 \rrbracket \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\hat{f}$ définie pour tout $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ par

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \omega^{-pk}.$$

PARTIE A - QUELQUES EXEMPLES

- ① Rappeler la formule de la somme d'une suite géométrique.
- ② Simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-pk}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Attention, le résultat dépend de p .
- ③ Posons $g : \llbracket 0, n-1 \rrbracket \rightarrow \mathbb{C}$, défini par $g(k) = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.
Calculer $\hat{g}(p)$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

PARTIE B - FORMULE DE PARSEVAL

Soit $f : \llbracket 0, n-1 \rrbracket \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

- ④ Montrer que pour tout $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $|\hat{f}(p)|^2 = \frac{1}{n} \sum_{0 \leq k, l \leq n-1} f(k) \overline{f(l)} \omega^{(l-k)p}$.
- ⑤ En déduire la formule de Parseval, $\sum_{p=0}^{n-1} |\hat{f}(p)|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |f(k)|^2$.

PARTIE C - FORMULE D'INVERSION

Soit $f : \llbracket 0, n-1 \rrbracket \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

- ⑥ Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f(k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=0}^{n-1} \hat{f}(p) \omega^{pk}$.