

DS

du 26/3/2025

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.

CORRECTION

Donner les tableaux de variations complets des fonctions suivantes. On donnera, quand c'est nécessaires, les asymptotes sous le tableau en précisant seulement les équations. *Par exemple, $x = 1$ ou $y = -2$.*

$$f(x) = \ln \circ \text{ch}(x) \quad ; \quad g(x) = \text{th} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \quad ; \quad h(x) = \arccos \left(\frac{1}{1+x^2} \right)$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$+\infty$	0	$+\infty$

$y = -x - \ln(2), \quad y = x - \ln(2)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g	$\text{th}(-1)$	-1	1

$y = \text{th}(-1)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

$y = \pi/2.$

Simplifier les expressions suivantes.

$\tan(\arcsin x) =$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin(\arccos x) =$	$\sqrt{1-x^2}$	$\cos(\arctan x) =$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
---------------------	---	---------------------	---	---------------------	---

Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, on a $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

On pose, pour $x \geq 0$, $f(x) = x - \ln(1+x)$ et $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.
 Alors f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \geq 0$, on a
 $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1} \geq 0$ et $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$.
 Ainsi, f et g sont croissantes sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
 De plus, $f(0) = g(0) = 0$, donc, pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$,
 ce qui entraîne $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Donner la décomposition canonique de la similitude donnée par $f : z \mapsto (1+i \tan \alpha)z - i \tan \alpha$, avec $\alpha \in [0, \pi/2[$.

$f = h \circ r$, où h est l'homothétie de centre le point d'affixe 1 et de rapport $1/\cos(\alpha)$,
 et r est la rotation de centre le point d'affixe 1 et d'angle α .

Que représente géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z , vérifiant $\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Soit $A = (1, -1)$ et $B = (0, 2)$.

L'ensemble des points M est le cercle de diamètre $[AB]$, épointé de A et B .

Que représente géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z , vérifiant $\frac{z-1+i}{z+5-3i}$ est un réel.

Soit $A = (1, -1)$ et $B = (-5, 3)$.

L'ensemble des points M est la droite (AB) , privée de B .

Soit un nombre entier $n \geq 2$. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^n = \bar{z}$.

Remarquons d'abord que $z = 0$ convient.

Supposons désormais $z \neq 0$.

En passant au module, on obtient $|z| = |\bar{z}|$, d'où $|z|^{n-1} = 1$ et donc $|z| = 1$.

On peut donc poser $z = e^{i\theta}$ et l'équation devient

$$e^{in\theta} = e^{-i\theta} \iff e^{i(n+1)\theta} = 1 \iff \theta = 2k\pi/(n+1), \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

EXERCICE 1: MAJORATION DE HUYGENS

- ① (a) La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables. On trouve immédiatement, pour tout

$$x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad f'(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1}{\cos^2 x}.$$

- (b) La fonction $\varphi : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 1$ est dérivable de dérivée $\varphi'(x) = 6(x^2 - x) \leq 0$. Ainsi, φ est décroissante avec $\varphi(1) = 0$. Par conséquent,

$$\forall x \in [0, 1], \quad 2x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0.$$

- (c) D'après les deux questions précédentes, la fonction f est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Comme $f(0) = 0$, f est positive sur cet intervalle et donc

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad 2 \sin x + \tan x \geq 3x.$$

- (d) L'inégalité n'est pas vraie pour $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ car la limite de f en $\frac{\pi}{2}$, par valeurs supérieures à $\pi/2$, est $-\infty$.

La fonction n'est donc pas positive sur cet intervalle.

- ② De même, la fonction $\psi : x \mapsto 2\text{sh}(x) + \text{th}(x) - 3x$, est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\psi'(x) = \frac{2\text{ch}^3(x) - 3\text{ch}^2(x) + 1}{\text{ch}^2(x)}.$$

Or le polynôme φ défini en 1, est strictement croissant sur $[1, +\infty[$ et $\varphi(1) = 0$, donc $\psi' \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que ψ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, or $\psi(0) = 0$ ce qui nous donne, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\psi(x) \geq 0$, donc que

$$2\text{sh}(x) + \text{th}(x) \geq 3x.$$

EXERCICE 2: ETUDE D'UNE FONCTION

Soit $g : x \mapsto \arccos\left(\frac{4 - 5 \cos x}{5 - 4 \cos x}\right)$.

- ① Notons D_g le domaine de définition de g . Pour tout $x \in D_g$, $g(x + 2\pi) = g(x)$, donc g est 2π périodique et il suffit d'étudier g sur un intervalle de longueur 2π .
De plus, $g(-x) = g(x)$, donc g est paire, et il suffit de l'étudier sur $[0, \pi]$ et l'étude sur $[-\pi, 0]$ se déduit par parité.

- ② Pour tout réel $x \in I$, $-1 \leq \cos x \leq 1$, alors $9 \geq 5 - 4 \cos x \geq 1 > 0$.
Ainsi, le dénominateur est strictement positif et ne s'annule pas.

$$\text{De plus, } -1 \leq \frac{4 - 5 \cos x}{5 - 4 \cos x} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -(5 - 4 \cos x) \leq 4 - 5 \cos x \leq 5 - 4 \cos x$$

$$\Leftrightarrow -5 + 4 \cos x \leq 4 - 5 \cos x \text{ et } 4 - 5 \cos x \leq 5 - 4 \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x \leq 1 \text{ et } -1 \leq \cos x.$$

Donc la première inégalité est vraie, par équivalence.

Ainsi, $u : x \mapsto \frac{4 - 5 \cos x}{5 - 4 \cos x}$ est définie sur I à valeurs dans $[-1, 1]$, domaine sur lequel $\arccos$ est définie.

Par composition, g est définie sur I .

- ③ Soit $x \in I$. Par définition, $g(x)$ est l'unique réel dans $[0, \pi]$ tel que $\cos(g(x)) = u(x)$.

$$\text{Donc } \cos(g(x)) = \frac{4 - 5 \cos x}{5 - 4 \cos x}.$$

$$\text{De plus, } \sin^2 \circ g(x) = 1 - \cos^2(g(x)) = \frac{25 - 40 \cos x + 16 \cos^2 x - (16 - 40 \cos x + 25 \cos^2 x)}{(5 - 4 \cos(x))^2} = \left(\frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos x}\right)^2.$$

$$\text{Ainsi, } |\sin(g(x))| = \left|\frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos x}\right|$$

Or $g(x) \in [0, \pi]$, donc $\sin(g(x)) \geq 0$, et de même, $x \in [0, \pi]$, donc $\sin(x) \geq 0$. Et on a déjà montré que $5 - 4 \cos x >$

0. Cela montre que l'on peut enlever la valeur absolue et donc on obtient

$$\sin(g(x)) = \frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos x}.$$

- ④ **Domaine de dérivabilité de g .** La fonction u , définie en ② est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, à valeurs dans $[-1, 1]$. La fonction arccos est dérivable sur $] -1, 1[$.

Résolvons $u(x) \in] -1, 1[$, ce qui équivaut à $-1 < \cos x < 1 \Leftrightarrow x \neq 0[\pi]$. Par composition, g est dérivable sur $]0, \pi[$.

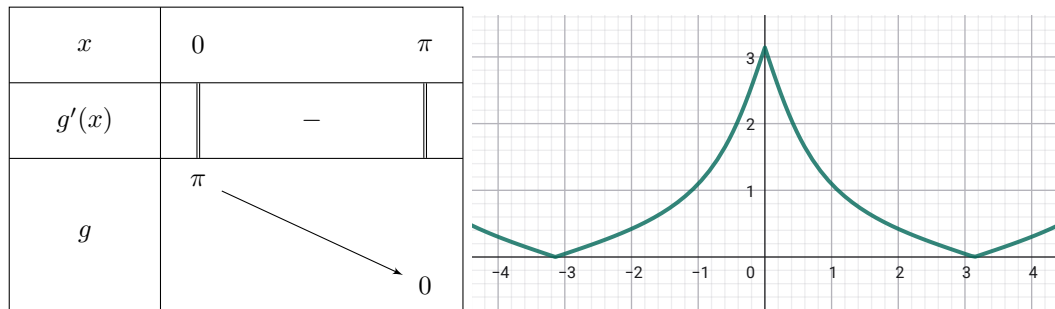
Dérivée de g . $\forall x \in]0, \pi[, \quad g'(x) = -\frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}.$

Or $u'(x) = \frac{5 \sin x (5 - 4 \cos x) - (4 - 5 \cos x) 4 \sin x}{(5 - 4 \cos x)^2} = \frac{9 \sin x}{(5 - 4 \cos x)^2}$ et $\sqrt{1-u^2(x)} = \sin(g(x)) = \frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos x}.$

Ainsi $\forall x \in]0, \pi[, \quad g'(x) = \frac{-3}{5 - 4 \cos x}.$

- ⑤ On obtient aussitôt $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow \pi^-} g'(x) = -\frac{1}{3}.$

- ⑥ D'après les questions précédentes, on obtient le tableau suivant.



- ⑦ Le discriminant de ce polynôme est 9, il a donc deux racines 2 et $\frac{1}{2}$. On obtient $-2X^2 + 5X - 2 = 2(2 - X)(X - 1/2)$

De plus, on a déjà vu que la fonction $x \mapsto 5 - 4 \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[1, +\infty[\subset]0, +\infty[$, intervalle sur lequel la fonction $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{y}}$ est dérivable. Par produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur I , et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{5-4 \cos x}} + \sin x \left(-\frac{1}{2}\right) 4 \sin x \frac{1}{(5-4 \cos x)^{3/2}} = \frac{\cos x (5 - 4 \cos x) - 2 \sin^2(x)}{(5 - 4 \cos x)^{3/2}} = \frac{-2 \cos^2 x - 5 \cos x - 2}{(5 - 4 \cos x)^{3/2}}$$

$$= \frac{2(2 - \cos x)(\cos x - 1/2)}{(5 - 4 \cos x)^{3/2}}.$$

Ainsi, $f'(x)$ a même signe que $\cos x - 1/2$. Or $\cos$ est décroissant strictement sur I et vaut $1/2$ en $\pi/3$, d'où le tableau

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	1	+	0
$f(x)$	0	$\nearrow 1/2$	$\searrow 0$

- ⑧ f est continue, strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$. $f(0) = 0$ et $f(\pi/3) = 1/2$. D'après le théorème de bijection, f

réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{3}]$ dans $[0, \frac{1}{2}]$ et

$$\text{admet donc une fonction réciproque notée } \varphi : \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

qui à y associe l'unique élément $x \in [0, \pi/3]$ tel que $f(x) = y$.

- ⑨ Soit x un élément de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{3}]$.

- ① Alors $y = f(x)$ est dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$. Or f est continue, strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{3}, \pi]$, et $y \in [f(\frac{\pi}{3}), f(\pi)]$. D'après le théorème de bijection, il existe un unique $z \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$ tel que $f(z) = y = f(x)$.

- (b) Comme $f(x) = f(z)$, alors $f(x)^2 = f(z)^2$. En notant $X = \cos x$ et $Z = \cos z$, on a $\sin^2 x = 1 - X^2$.
 Ainsi, l'égalité devient $\frac{1 - X^2}{5 - 4X} = \frac{1 - Z^2}{5 - 4Z}$, d'où $(1 - X^2)(5 - 4Z) - (1 - Z^2)(5 - 4X) = 0$.
 Donc $5 - 4Z - 5X^2 + 4X^2Z - (5 - 4X - 5Z^2 + 4Z^2X) = 0$, soit $4(X - Z) - 5(X^2 - Z^2) + 4(X^2Z - XZ^2) = 0$.
 On obtient finalement $(X - Z)(4 - 5(X + Z) + 4XZ) = 0$. Or $\cos$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ et $0 \leq x < z \leq \pi$, donc $X \neq Z$.

Ainsi, $4 - 5X = Z(5 - 4X)$. Or $5 - 4X \neq 0$, donc en remplaçant on obtient

$$\cos z = \frac{4 - 5 \cos x}{5 - 4 \cos x}.$$

- (c) On a $z \in [\frac{\pi}{3}, \pi] \subset [0, \pi]$ et $\cos z = u(x)$. Alors par définition de arccos, $z = \arccos(u(x))$, donc $z = g(x)$.

- (d) On a déjà calculé $\sin(z) = \sin(g(x)) = \frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos x}$.

Or $\cos(x + z) = \cos x \cos z - \sin x \sin z$, ce qui donne

$$\cos(x + z) = \frac{4 \cos x - 3 \cos^2 x - 2}{5 - 4 \cos x},$$

et de même,

$$\cos(x - z) = \frac{-8 \cos^2 x + 4 \cos x + 3}{5 - 4 \cos x}.$$

Or pour tout réel θ , $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$, donc $\cos^2(\frac{x+z}{2}) = \frac{1}{2}(1 + \cos(x + z)) = \frac{\sin^2(x)}{(5 - 4 \cos x)}$ et

$$\cos^2(\frac{x-z}{2}) = \frac{4 \sin^2(x)}{(5 - 4 \cos x)}.$$

Il reste à connaître le signe des termes. Comme $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, alors $\sin x \geq 0$.

De plus, $z \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$, donc $x - z \in [-\pi, 0]$, ainsi, $\frac{x-z}{2} \in [-\pi/2, 0]$, intervalle sur lequel $\cos$ est positif. Donc

$$\cos(\frac{x-z}{2}) = \frac{2 \sin x}{\sqrt{5 - 4 \cos x}}.$$

Enfin, $x + z \in [\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$, intervalle trop grand pour connaître le signe de cosinus $\frac{x+z}{2}$.

On étudie $h : x \mapsto x + g(x)$, car $z = g(x)$. h est dérivable sur $]0, \pi/3]$ et $h'(x) = \frac{2 - 4 \cos x}{5 - 4 \cos x}$, donc est strictement décroissante sur $[0, \pi/3]$, car sur cet intervalle $\cos \geq 1/2$, avec égalité en $\frac{\pi}{3}$.

Or $h(0) = \pi$ et $h(\frac{\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3}$. Donc $\frac{x+z}{2} \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$, intervalle sur lequel cosinus est positif.

Finalement $\cos(\frac{x+z}{2}) = \frac{\sin x}{\sqrt{5 - 4 \cos x}}.$

- (e) La question précédente a montré que $\cos(\frac{x+z}{2}) = f(x)$ et que $\cos(\frac{x-z}{2}) = 2f(x)$.

Or $\frac{x+z}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}] \subset [0, \pi]$, donc $\frac{x+z}{2} = \arccos(f(x))$

De même, $\frac{x-z}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, donc $\frac{z-x}{2} \in [0, \pi]$, et $\frac{z-x}{2} = \arccos(2f(x))$

En faisant la différence entre les deux, on obtient $x = \arccos(f(x)) - \arccos(2f(x))$.

Or l'équation $y = f(x)$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ équivaut à $x = \varphi(y)$. Ainsi,

$$\varphi(y) = \arccos(y) - \arccos(2y) \text{ pour } y \in [0, \frac{1}{2}].$$

EXERCICE 3: UNE ÉQUATION COMPLEXE

- (1) En multipliant le numérateur et dénominateur par $\cos \alpha$, on obtient $\frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha} = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$.

D'où

$$\frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha} = e^{2i\alpha}.$$

- (2) On utilise l'angle moitié.

$$\frac{e^{i\theta} - 1}{i(e^{i\theta} + 1)} = \frac{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}{i(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})} = \frac{2i \sin(\theta/2)}{2i \cos(\theta/2)} = \tan(\theta/2) \in \mathbb{R}.$$

Il n'y a pas de problème de définition de $\tan$, car $\theta \in]-\pi, \pi[$.

- ③ Grâce aux questions précédentes, on a vu que l'équation (*) est équivalente à $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = e^{2i\alpha}$.

Posons $Z = \frac{1+iz}{1-iz}$. L'équation (*) devient alors $Z^n = e^{2i\alpha}$. Par passage au module, on obtient $|Z| = 1$.

Posons alors $Z = e^{i\theta}$, pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. Par identification des arguments modulo 2π , on a $\theta = \frac{2\alpha}{n} \left[\frac{2\pi}{n} \right]$.

Mais $e^{i\theta} = \frac{1+iz}{1-iz} \iff z = \frac{e^{i\theta} - 1}{i(e^{i\theta} + 1)}$. Donc (*) devient

$$z = \tan(\theta/2) = \tan\left(\frac{\alpha + k\pi}{n}\right), \text{ pour } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

- ④ On a $\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{i-z}{i+z}$. Soient I et J les points d'affixes respectives i et $-i$.

Géométriquement, cela veut dire que les points M d'affixes réelles de valeur $\tan\left(\frac{\alpha+k\pi}{n}\right)$, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, sont les uniques points tels que n fois l'angle $\widehat{JMI}$ soit 2α .