

DS 3 : Fiche de calculs

du 5/11/2025

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.

Nom et prénom :

Note :

Donner les réponses sur la feuille sans justification. Vous pouvez utiliser un brouillon.

Durée : 1 heure

Donner les tableaux de variations complets des fonctions suivantes. On donnera, quand c'est nécessaires, les asymptotes sous le tableau en précisant seulement les équations. *Par exemple, $x = 1$ ou $y = -2$.*

$$f(x) = \ln \circ \operatorname{ch}(x) \quad ; \quad g(x) = \operatorname{th} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \quad ; \quad h(x) = \arccos \left(\frac{1}{1+x^2} \right)$$

Simplifier les expressions suivantes.

$\tan(\arcsin x) =$

$\sin(\arccos x) =$

$\cos(\arctan x) =$

Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, on a $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Donner la décomposition canonique de la similitude donnée par $f : z \mapsto (1+i \tan \alpha)z - i \tan \alpha$, avec $\alpha \in [0, \pi/2[$.

Que représente géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z , vérifiant $\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Que représente géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z , vérifiant $\frac{z-1+i}{z+5-3i}$ est un réel.

Soit un nombre entier $n \geq 2$. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^n = \bar{z}$.

DS 1
 du 17/09/2025

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.
Faites attention au soin apporté à votre présentation et à la justesse de votre rédaction.
Durée : 3 heures.

EXERCICE 1: MAJORATION DE HUYGENS

Soit $f : x \mapsto 2 \sin x + \tan x - 3x$.

- ① Donner l'ensemble de définition de f . Justifier que f est dérivable et calculer sa dérivée.
- ② Déterminer le signe pour $x \in [0, 1]$ de la quantité $2x^3 - 3x^2 + 1$.
- ③ En déduire que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 2 \sin x + \tan x \geq 3x$.
- ④ L'inégalité est-elle encore vraie pour $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$?
- ⑤ Arrive-t-on à montrer $2 \operatorname{sh} x + \operatorname{th} x \geq 3x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$?

EXERCICE 2: ETUDE DE FONCTIONS
PARTIE A - ETUDE D'UNE FONCTION

Soit $g : x \mapsto \arccos\left(\frac{4 - 5 \cos x}{5 - 4 \cos x}\right)$.

- ① Montrer qu'il suffit d'étudier g sur $I = [0, \pi]$.
- ② Vérifier que g est correctement défini sur tout I .
- ③ Pour x un réel fixé dans I , calculer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ les quantités $\cos \circ g(x)$ et $\sin \circ g(x)$.
On justifiera proprement les étapes.
- ④ Déterminer, en fonction de $\cos x$ seul, la dérivée g' de g , après avoir déterminé le domaine de dérivabilité de g .
- ⑤ Donner les limites de g' en 0 et en π .
- ⑥ Dresser le tableau de variation puis le graphe de g .

PARTIE B - UTILISATION DE g POUR TROUVER UNE RÉCIPROQUE

On introduit la fonction f définie sur I par : $f : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{5 - 4 \cos x}}$.

- ⑦ Après avoir factorisé la fonction polynomiale $x \mapsto -2x^2 + 5x - 2$, dresser le tableau de variation de f sur I .
- ⑧ Prouver que f admet sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ une fonction réciproque que l'on note φ . Donner le domaine de définition de φ .
- ⑨ Soit x un élément de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{3}]$.
 - Ⓐ Démontrer qu'il existe un unique élément z de l'intervalle $[\frac{\pi}{3}, \pi]$ tel que $f(z) = f(x)$.

- ⑥ Prouver que $\cos z = \frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}$.
 On pourra, pour simplifier les calculs, noter $X = \cos x$, $Z = \cos z$, et penser à factoriser dans l'égalité par $X - Z$ afin de simplifier les calculs.
 Vos calculs pourront mener à une expression de la forme $4u^4 - 20u^3 + 33u^2 - 20u + 4$ qui se factorise en $(2u^2 - 5u + 2)^2$, mais vous pouvez réussir la question sans cette factorisation.
 En déduire que $z = g(x)$.
- ⑦ Donner en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ la valeur de $\sin z$ puis les quatre valeurs $\cos(x+z)$, $\cos(x-z)$, $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{x-z}{2}\right)$.
- ⑧ En déduire une expression simple de φ .
- ⑩ Tracer les courbes de f et φ , définies sur $[0, \pi/3]$.

EXERCICE 3: UNE ÉQUATION COMPLEXE

Soient $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On veut résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}. \quad (*)$$

- ① Mettre $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ sous forme trigonométrique.
- ② Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Montrer que $\frac{e^{i\theta} - 1}{i(e^{i\theta} + 1)}$ est un réel dont on donnera son expression simple.
- ③ Résoudre l'équation (*). Vérifier que les racines sont réelles.
- ④ Interpréter géométriquement le résultat.