

DS

du 26/3/2025

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.

CORRECTION

EXERCICE 1: FORMULE DE STIRLING

- ① Pour tout $n \geq 1$, $\ln u_n = n \ln n - \ln(n!)$ et $\ln v_n = -\ln n + \frac{1}{n} \ln(n!)$.
 D'où, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ln v_n = -\frac{1}{n} \ln u_n}$.
- ② Une étude de fonction montre que $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $] -1, 0]$ et $f(0) = 0$, d'où la première inégalité.
 La seconde s'obtient de manière similaire en étudiant la fonction $g : x \mapsto x - \ln(1+x) - \frac{x^2}{2}$.
- ③ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$.
 Donc $\boxed{u \text{ est croissante}}$.
- ④ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \ln u_n - \ln u_{n+1} = 1 - \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.
 En utilisant ②, on obtient $\boxed{1 + \ln u_n - \ln u_{n+1} \leq n \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n}}$.
- ⑤ En sommant l'inégalité de ④ pour $k = 1, 2, \dots, n$, On a $0 \leq \sum_{k=1}^n (1 + \ln u_k - \ln u_{k+1}) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
 Par télescopage, $\boxed{0 \leq n - \ln u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$.
- ⑥ Pour $n = 1$, on a $1 \leq \ln(1) + 1 = 1$.
 Supposons alors que pour un entier non nul n fixé, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.
 On a alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - 1 \leq \ln(n) - \ln(n+1) + \frac{1}{n+1} = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} = \ln\left(1 + \left(-\frac{1}{n+1}\right)\right) - \left(-\frac{1}{n+1}\right) \leq 0,$$
 d'après ②, puisque $\left(-\frac{1}{n+1}\right) > -1$.
 Cela prouve l'hérédité et donc la proposition pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- ⑦ Les questions ⑤ et ⑥ nous donne $0 \leq 1 - \frac{\ln(u_n)}{n} \leq \frac{1 + \ln(n)}{n}$. D'après le théorème d'encadrement,
 $\boxed{\left(\frac{\ln(u_n)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 1}$.
- ⑧ D'après ① et par composée de limite, $\boxed{v \text{ converge vers } 1/e}$.

EXERCICE 2: UNE SUITE PRESQUE RÉCURRENTTE

PARTIE A - PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

- ① Par récurrence, on a $a_1 \geq 2$, et si, pour n fixé, $a_n \geq n + 1$, alors

$$a_{n+1} \geq a_n^2 - a_n + 1 \geq (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + n + 1 \geq n + 2.$$

- ② Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq 2$, $x_{n+1} = x_n a_{n+1} > x_n$. Donc x est strictement croissante.
- De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_{n+1} = y_n a_{n+1} + x_n > y_n$, donc y est strictement croissante.

- ③ On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n - u_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} - \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n(a_{n+1} - 1) + x_n}{x_n(a_{n+1} - 1)} - \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n(a_{n+1} - 1) + x_n - y_n(a_{n+1} - 1)}{x_n(a_{n+1} - 1)} = \frac{1}{a_{n+1} - 1}.$$

- ④ On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} - 1}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{a_{n+1} - 1} \quad \text{et} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Donc
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2} - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

- ⑤ On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < v_n$, d'après ③, et $v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

De plus, d'après la question précédente, u est croissante et v est décroissante, donc les deux suites sont adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers une limite commune ℓ .

- ⑥ (a) Soit (N_n) une suite d'entier convergente vers l . En prenant $\varepsilon = 1/2$ dans la définition de limite, on obtient, qu'à partir d'un certain rang, $l - 1/2 < N_n < l + 1/2$. L'intervalle étant de taille inférieure à 1, il n'y a qu'un seul entier possible pour N_n , donc la suite est stationnaire. En particulier, l est cet entier.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que

$$px_{n+1} - qy_{n+1} - px_n - qy_n = \underbrace{q(x_{n+1} - x_n)}_{\geq 0} \underbrace{(l - v_n)}_{\leq 0},$$

comme v est décroissante vers l . Donc $(px_n - qy_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. De plus,

$$px_n - qy_n = x_n(q\ell - qu_n) = qx_n(\ell - u_n) \geq 0,$$

comme u est croissante vers l . Donc $(px_n - qy_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée et donc converge.

D'après ce qui précède, $(px_n - qy_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est stationnaire.

- ⑦ A partir d'un certain rang, on a $px_n - qy_n = C$, une certaine constante. D'après ce qui précède,

$$(l - v_n)q(x_{n+1} - x_n) = 0,$$

or $q \neq 0$ et x est strictement croissante, donc $v_n = l$ et donc v est stationnaire.

Enfin, Cela donne donc, qu'à partir d'un certain rang, $v_{n+1} - v_n = 0$, et donc ④ nous donne

$$a_{n+1}^2 - a_{n+1} - a_{n+2} + 1 = 0, \text{ donc } a_{n+1}^2 - a_{n+1} + 1 = a_{n+2}.$$

- ⑧ La suite $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{p^{2^k}}$ converge par comparaison à la somme d'une suite géométrique. On a bien, en prenant $a_k = p^{2^k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{n+1} = p^{2^{n+1}} \geq p^{2^{n+1}} - p^{2^n} + 1 = a_n^2 - a_n + 1.$$

Si la limite était rationnelle, d'après la question précédente, on aurait égalité, ce qui est absurde. Donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2^k}} \notin \mathbb{Q}.$$

EXERCICE 3

PARTIE A - PRÉLIMINAIRES

- ① Comme $f^0 = \text{Id}_E$, on a $f^0(A) = A \subset B$. Si $x \in B$, alors $x = f^n(a)$ pour un certain $a \in A$. Ainsi $f(x) = f^{n+1}(a) \in B$. Donc $f(B) \subset B$.
- ② Si C contient A et est stable par f , pour tout $a \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $a \in A \subset C$, donc $f(a) \in C$, par stabilité, puis $f^2(a) \in C$, puis par récurrence immédiate, $f^n(a) \in C$.
- ③ Si $x \in B$, alors $x = f^n(a)$ pour un certain $a \in A$ et $n \in \mathbb{N}$. La question précédente donne $x \in C$. Donc $B \subset C$.

B est ainsi la plus petite partie de E contenant A et stable par f .

PARTIE B - EXEMPLES

- ④ À partir de 3, les itérés sont 3, 9, 81, 81², ..., soit 3^{2ⁿ}.
À partir de i , on obtient $i, -1, 1, 1, \dots$.
La plus petite partie stable contenant $\{3, i\}$ est donc, par récurrence immédiate, $B = \{3^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{i, -1, 1\}$.
- ⑤ (a) Pour $x \geq 1$, $f(x) = \frac{x^2+3}{4} \geq 1$. Donc $f([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$.
- (b) Comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $$f^n(A) = [u_n, v_n], \quad 0 \leq u_n \leq v_n.$$
- (c) Les points fixes sont 1 et 3.
(u_n) reste dans $[1, 3]$ et, comme $f(x) \leq x$ sur cet intervalle, (u_n) est décroissante et converge vers 1.
 $v_n > 3$ pour tout n , et $f(x) > x$ pour $x > 3$, donc (v_n) est croissante et diverge vers $+\infty$, car si elle convergerait, elle aurait un point fixe de f comme limite, ce qui est impossible.
- (d) Comme $u_n \rightarrow 1$ et $v_n \rightarrow +\infty$, on obtient, d'après la partie A, $B =]1, +\infty[$.

PARTIE C - CAS D'UN ENSEMBLE FINI

- ④ Réflexivité : $x = \sigma^0(x)$.
Symétrie : si $y = \sigma^k(x)$ alors $x = \sigma^{-k}(y)$.
Transitivité : si $y = \sigma^k(x)$ et $z = \sigma^l(y)$, alors $z = \sigma^{k+l}(x)$.
- ⑤ E est fini et $\mathbb{N}$ infini : l'application ne peut être injective. En effet, si l'application était injective, on aurait un seul antécédent, au plus, pour chaque élément de E , soit $\text{Card} E$ au maximum. C'est impossible, puisque $\mathbb{N}$ est infini, et chaque élément de $\mathbb{N}$ doit avoir une image.
- ⑥ Comme l'application n'est pas injective, il existe $p < q$ tels que $\sigma^p(x) = \sigma^q(x)$, d'où $\sigma^{q-p}(x) = x$. L'ensemble considéré est donc non vide dans $\mathbb{N}$, donc possède un plus petit élément $n(x)$.
- ⑦ Supposons $\sigma^p(x) = \sigma^q(x)$, pour $p < q < n(x)$. Alors $\sigma^{q-p}(x) = x$, avec $q - p < n(x)$, ce qui est absurde par définition de $n(x)$.
- ⑧ La classe de x est par définition, $\text{cl}(x) = \{y \in E \mid x \sim y\}$. Clairement $x, \sigma(x), \dots, \sigma^{n(x)-1}(x) \in \text{cl}(x)$. Pour tout $k \geq n(x)$, on pose $k = n(x)q + r$, la division euclidienne de k par $n(x)$, et on a
- $$\sigma^k(x) = \sigma^r(\sigma^{qn(x)}(x)) = \sigma^r(x) \in \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{n(x)-1}(x)\} \text{ Donc } \text{cl}(x) = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{n(x)-1}(x)\}.$$
- ⑨ Comme dans la partie A, on construit la plus petite partie stable par σ contenant x : c'est $\text{cl}(x)$.