

DS 4

du 26/11/2025

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.
Faites attention au soin apporté à votre présentation et à la justesse de votre rédaction.
Durée : 4 heures.

EXERCICE 1: FORMULE DE STIRLING

On considère les suite u et v définies, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = \frac{n^n}{n!}$ et $v_n = \frac{1}{n}(n!)^{1/n}$.

- ① Trouver une relation simple liant $\ln(v_n)$ et $\ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- ② Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}$.
- ③ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Qu'en déduit on pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
- ④ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq 1 + \ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) \leq \frac{1}{2n}$.
- ⑤ Démontrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq n - \ln(u_{n+1}) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
- ⑥ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.
On pourra raisonner par récurrence et on pensera à réutiliser ②.
- ⑦ Déduire de ce qui précède que $\frac{\ln(u_n)}{n}$ converge et donner sa limite.
- ⑧ Déterminer la limite de la suite v . *On appelle ce résultat "La formule de Stirling".*

EXERCICE 2: UNE SUITE PRESQUE RÉCURRENTTE

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers naturels fixée pour laquelle $a_1 \geq 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} \geq a_n^2 - a_n + 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \prod_{k=1}^n a_k$ et on note y_n l'unique entier pour lequel $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{y_n}{x_n}$.

- ① Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq n + 1$.
- ② En déduire que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes.

On peut ainsi poser pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{y_n}{x_n}$ et $v_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$.

- ③ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{a_{n+1} - 1}$.
- ④ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{a_{n+2} - 1} + \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$.
- ⑤ En déduire que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

On fait l'hypothèse dans cette question que ℓ est rationnel, c'est à dire, que $\ell = \frac{p}{q}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

- ⑥ (a) Montrer qu'une suite d'entier convergente est stationnaire, c'est à dire, constante à partir d'un certain rang.

- (b) Montrer que la suite $(px_n - qy_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis qu'elle est stationnaire.
On pourra exploiter ici les propriétés des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.*
- (7) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est stationnaire, puis qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ pour lequel pour tout $n \geq N$, $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$.
- (8) Montrer que pour tout entier $p \geq 2$, la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{p^{2^k}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2^k}}$ est un irrationnel.

EXERCICE 3: UNION DES ITÉRÉS D'UNE APPLICATION

Notations. Pour tout ensemble E , pour toute application $f : E \longrightarrow E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f^n désigne la composée $f \circ \dots \circ f$, n fois, **avec par convention** $f^0 = \text{Id}_E$.
 On rappelle qu'une partie A de E est dite **stable** par f si $f(A) \subset A$.

PARTIE A - PRÉLIMINAIRES

Soient E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ une application et A une partie de E . On pose $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(A)$.

- (1) Montrer que B contient A et est stable par f .
- (2) Soit C une partie de E contenant A et stable par f .
 Montrer que pour tout $a \in A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(a) \in C$.
- (3) En déduire que $B \subset C$.

En résumé, B est la plus petite partie de E , au sens de l'inclusion, contenant A et stable par f .

PARTIE B - EXEMPLES

- (4) On note f la fonction $z \mapsto z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
 Déterminer la plus petite partie de $\mathbb{C}$ contenant $\{3, i\}$ et stable par f .
- (5) On note f la fonction $x \mapsto \frac{x^2 + 3}{4}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et on pose $A = [2, 4]$ et $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(A)$.

On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}.$$

- (a) Montrer que $[1, +\infty[$ est stable par f .
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $f^n(A) = [u_n, v_n]$.
On rappelle que l'image d'un segment par une application continue est un segment.
- (c) Étudier la nature (convergence ou divergence) des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donner leurs limites si elles existent.
- (d) En déduire B .

PARTIE C - CAS D'UN ENSEMBLE FINI

Soient E un ensemble **fini** et σ une bijection de E sur E . La notation σ^n a été définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais la bijectivité de σ offre la possibilité d'une généralisation aux entiers négatifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note σ^{-n} la composée $\sigma^{-1} \circ \dots \circ \sigma^{-1}$, n fois.

On définit sur E une relation $\sim$ de la façon suivante : pour tous $x, y \in E$, $x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, y = \sigma^k(x)$.

- (6) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E .
- (7) Soit $x \in E$. Pourquoi l'application $k \mapsto \sigma^k(x)$ n'est-elle pas injective sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans E ?
- (8) En déduire que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \mid \sigma^k(x) = x\}$ possède un plus petit élément, que l'on notera $n(x)$.
- (9) Montrer que les éléments $x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{n(x)-1}(x)$ sont deux à deux distincts pour tout $x \in E$.
- (10) Montrer que pour tout $x \in E$, la classe d'équivalence de x pour $\sim$ est l'ensemble $\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{n(x)-1}(x)\}$.
- (11) Quel est le lien avec les parties précédentes ?