

Exercice 1: Voir TD.

Exercice 2:

① En prenant $h=1$ et $x=y-\frac{1}{2}$ avec $y \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(y) = f\left(y+\frac{1}{2}\right) - f\left(y-\frac{1}{2}\right) \quad (*)$$

Donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et $\forall y \in \mathbb{R}$

$$f''(y) = f'\left(y+\frac{1}{2}\right) - f'\left(y-\frac{1}{2}\right)$$

Supposons f k fois dérivable, pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé

En dérivant $(k-1)$ fois l'équation $*$, on

$\forall y \in \mathbb{R}, f^{(k)}(y) = f^{(k-1)}\left(y+\frac{1}{2}\right) - f^{(k-1)}\left(y-\frac{1}{2}\right),$

donc $f^{(k)}$ est dérivable comme somme de fonctions dérivables et

$$\forall y \in \mathbb{R}, f^{(k+1)}(y) = f^{(k)}\left(y+\frac{1}{2}\right) - f^{(k)}\left(y-\frac{1}{2}\right).$$

donc f est $(k+1)$ -fois dérivable.

Par récurrence, f est n -fois dérivable, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc f est $\mathcal{C}^\infty$.

② On a $\forall x, h \in \mathbb{R}$

$$f'(x+h) = f'\left(x+\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} f''\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$$\text{et } f''(x+h) = \frac{1}{2} f''\left(x+\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2} f''\left(x+\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{4} f'''(x+\frac{h}{2})$$

d'où $\forall x, h \in \mathbb{R}$

$$\frac{h}{4} f'''(x+\frac{h}{2}) = f''(x+h) - f''(x+\frac{h}{2})$$

En posant, $y = x + \frac{h}{2}$

$$\text{On a, pour } h \neq 0, \quad \frac{1}{2} f'''(y) = \frac{f''(y+\frac{h}{2}) - f''(y)}{h/2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'''(y)$$

$$\text{Donc } f'''(y) = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

③ Donc $f''(y) = C$, puis $f'(y) = Cy + D$
et enfin $f(y) = Cy^2 + Dx + E$, $\forall y \in \mathbb{R}$
avec $C, D, E \in \mathbb{R}$ des constantes.

$$\begin{aligned} \text{④ Pour tous } x, h \in \mathbb{R}, & f(x+h) - f(x) - f'(x+\frac{h}{2}) \\ &= C(x+h)^2 + D(x+h) + E - Cx^2 - Dx - E \\ &\quad - 2C(x+\frac{h}{2})h - Dh \\ &= \cancel{2Cxh} + Dh + \cancel{Ch^2} - \cancel{2Cah} - \cancel{Ch^2} - \cancel{Dh} \end{aligned}$$

Donc Toutes les fonctions polynomiales de degré 2 sont solutions.

Exercice 3:

① Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

② Soit $k \in \mathbb{N}$, tq $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} f^{(k)}(x)$

Alors, en dérivant l'équation, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$-f^{(k+1)}(-x) = (-1)^{k+1} f^{(k+1)}(x), \quad \text{d'où} \quad f^{(k+1)}(x) = (-1)^{(k+1)+1} f^{(k+1)}(x)$$

De plus, $f^{(0)}(x) = f(x) = -f(x) = -f^{(0)}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
puisque la fonction arctan est impaire.

Donc, on a montré par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(-x) = (-1)^{k+1} f^{(k)}(x)$$

La formule nous donne directement que $f^{(k)}$ a la
la parité inverse de k .

③ Pour $n=1$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{ce qui donne } (*)_1 \text{ pour } P_1 = 1$$

et $-2n \times 1 + n \times 2 = 0$, en prenant $P_0 = 2$

Supposons $(*)_1$ et $(*)_2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Dériver $(*)_n$, donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! \frac{P_n(x) \times 2x}{(1+x^2)^{n+1}} + (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{P_n'(x)}{(1+x^2)^n}$$

$$= (-1)^n n! \frac{2x P_n(x) - P_n'(x) (x^2+1) \times \frac{1}{n}}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Ce qui donne $(*)_1$ au rang $n+1$ en posant, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$P_{n+1}(x) = 2x P_n(x) - P_n'(x) (x^2+1) \times \frac{1}{n}$$

d'où

$$n P_{n+1}(x) - 2x n P_n(x) + (x^2+1) P_n'(x) = 0$$

④ On a $P_1 = 1$ de degré 0.

Pour $n \in \mathbb{N}$, si P_n est de degré $n-1$, alors

$$n P_{n+1}(x) = 2x n P_n(x) - (x^2+1) P_n'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

Si a_n est le coefficient dominant de P_n , alors le coefficient dominant de P_{n+1} est

$$a_{n+1} = \frac{2n - (n-1)}{n} a_n = \frac{n+1}{n} a_n.$$

et P_{n+1} est de degré n et $a_n = n$, par récurrence immédiate

On a prouvé le résultat voulu par récurrence.

⑤ D'après $(*)_1$ P_n a la même parité que f
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(-x) = \begin{cases} P_n(x) & \text{si } n \text{ est impair} \\ -P_n(x) & \text{sinon.} \end{cases}$

Si n est impair, on a

$$P_n(1) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k p_k = P_{(-1)}$$

Donc $p_{2k+1} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, et P_n n'a que des monômes avec des puissances paires.

On fait la même chose pour le cas pair.

⑥ a) La formule de Leibniz nous donne, pour $g: x \mapsto (1+x^2) f'(x)$, alors $g^{(n+1)}$ est nulle

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g^{(n)}(x) = 0 = (1+x^2) f^{(n+1)}(x) + 2x n f^{(n)}(x) + n(n-1) f^{(n-1)}(x)$$

⑥ b) On a, par tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 = (-1)^n n! \frac{P_{n+1}(x)}{(x^2+1)^n} + 2x n (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

$$+ (-1)^n (n-2)! \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n-1}} \times n(n-1)$$

$$\Leftrightarrow 0 = P_{n+1}(x) - 2x P_n(x) + P_{n-1}(x) (1+x^2) \quad (*)$$

or la définition de P_{n+1} était

$$P_{n+1}(x) - 2x P_n(x) + (x^2+1) P_n'(x) \times \frac{1}{n} = 0$$

Donc $P_{n-1}(x) (1+x^2) = P_n'(x) \times \frac{x^2+1}{n}$

D'où $n P_{n-1}(x) = P_n'(x)$ (*)

(c) En réécrivant les relations ci-dessus, (*) donne pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 = P_n(x) - 2x P_{n-1}(x) + P_{n-2}(x) (1+x^2)$$

et donc en utilisant (*):

$$0 = P_n(x) - \frac{2x}{n} P_n'(x) + \frac{1+x^2}{n(n-1)} P_n''(x)$$

D'où l'équation différentielle valide.

Exercice 4 :

① $B_0 = 1$ existe.

la relation $B_n' = n B_{n-1}^{(*)}$, $n \in \mathbb{N}^*$ nous donne le degré de B_n (égal à n), par récurrence immédiate.

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, B_{n-1} existe.

Posons $B_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, avec $a_k \in \mathbb{R}$, pour tout $k \in [0, n]$

la relation $(*)$ nous donne alors

$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k} a_{k-1} x^k + \text{Cste}.$$

Mais $\int_0^1 B_n(t) dt = 0$
donc $\sum_{k=1}^n \frac{n}{k(k+1)} a_{k-1} + \text{Cste} = 0$

Donc la constante est unique et donc

B_n existe et est unique.

② On a par primitive puis intégration entre 0 et 1.

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$$

③ On a $B(1) - B(0) = \int_0^1 B_n' = \int_0^1 n B_{n-1} = 0$

$$\textcircled{1} \text{ 'a} \quad \underline{B(1) = B(0)}$$

④ On a d'abord, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$B_1(1-x) = 1-x - \frac{1}{2} = -x + \frac{1}{2} = -B_1(x)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons

tout à gauche et on dérive.

$$f(x) = B_n(1-x) + (-1)^{n+1} B_n(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale

$$\text{et pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -B_n'(1-x) + (-1)^{n+1} B_n'(x) \\ = -(n B_{n-1}(1-x) - (-1)^{n-1} n B_{n-1}(x))$$

$$= 0, \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\underline{B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)}$$

$$\textcircled{5} \quad B_{2n+1}(1) \stackrel{\textcircled{2}}{=} B_{2n+1}(0) \stackrel{\textcircled{4}}{=} -B_{2n+1}(1)$$

$$\text{Donc } \underline{B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0) = 0}$$

$$\text{De plus } \underline{B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) \stackrel{\textcircled{4}}{=} -B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0}$$

⑥ On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

tout à gauche et on dérive

$$B_1(1+x) = x+1 - \frac{1}{2} = B_1(x) + 1 \times x^{1-1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, supposons que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$B_{n-1}(1+x) - B_{n-1}(x) - (n-1)x^{n-2} = 0$$

La dérivée de $x \mapsto B_n(x+1) - B_n(x) - n x^{n-1}$

est la fonction $x \mapsto B'_n(x+1) - B'_n(x) - n(n-1)x^{n-2}$
 $= n(B_{n-1}(x+1) - B_{n-1}(x) - (n-1)x^{n-2})$
 $= 0$

Donc la fonction est constante et nulle en 0,
donc c'est la fonction nulle.

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$B_n(1+x) - B_n(x) + n x^{n-1} = 0$$

⑦ Soient $p, n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$k^n = \frac{B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)}{n+1}$$

Donc
$$S_n(p) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^p B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)$$

D'où
$$S_n(p) = \frac{1}{n+1} B_{n+1}(p+1) - B_{n+1}(1)$$

et

$$S_1(p) = \frac{(p+1)^2 - (p+1) - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}}{2} = \frac{p(p+1)}{2}$$

$$S_2(p) = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

$$S_3(p) = \frac{p^2(p+1)^2}{4}$$

⑧ Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k x^{n-k}$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La k -ième dérivée en 0 donne

$$B_n^{(n-k)}(0) = \binom{n}{k} b_k \times (n-k)!$$

$$\text{D'où } \cancel{n \times (n-1) \times \dots \times (k+1)} B_k(0) = \frac{n!}{\cancel{k! \cdot (n-k)!}} b_{n-k} \cancel{(n-k)!}$$

D'où le résultat.

⑨ On a alors en évaluant en 1, $\forall n \in \mathbb{N}^+$

$$b_{n+1} = B_{n+1}(0) = B_{n+1}(1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_k,$$

$$\text{D'où } \boxed{b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_k}$$

$$\textcircled{10} \quad b_0 = 1, \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = -\frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{3}{2}\right) = +\frac{1}{6}$$

$$b_3 = 0$$

$$b_4 = -\frac{1}{5} \left(1 - \frac{5}{2} + \frac{10}{6}\right) = -\frac{1}{30}$$

$$b_5 = 0$$

$$b_6 = -\frac{1}{7} \left(1 - \frac{7}{2} + \frac{21}{6} - \frac{35}{30}\right) = \frac{1}{42}$$

$$\textcircled{11} \quad \text{On a } B_1(x) + B_1\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2^0} B_1(2x)$$

tout à gauche et on dérive

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la dérivée de } x \mapsto B_n(x) + B_n\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2^{n+1}} B_n(2x)$$

$$\text{est } B_n'(x) + B_n'\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{2^{n+1}} B_n'(2x)$$

$$= n B_{n-1}(x) + n B_{n-1}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{2n}{2^{n+1}} B_{n-1}(2x)$$

$$= 0, \text{ si } B_{n-1}(x) + B_{n-1}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2^{n-2}} B_{n-1}(2x) = 0$$

D'où la même preuve par récurrence.

(12) On a donc $B_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) b_n$

(13) On se place sur $]0, \frac{1}{2}[$
Supposons pour n fixé que

B_{2n} est strictement monotone et

B_{2n+1} est de signe constant

On a alors $B'_{2n+2} = (2n+2) B'_{2n+1}$ qui
est de signe constant, donc est
strictement monotone.

De même, B'_{2n+3} est strictement monotone
donc B_{2n+3} est convexe ou concave.

Or $B_{2n+3}(0) = B_{2n+3}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, donc

$B_{2n+3} \geq 0$ ou négatif sur cet intervalle

(14) B_{2n} est strictement monotone sur $]0, \frac{1}{2}[$

Donc $|B_{2n}| \leq \max\left(|B_{2n}(0)|, |B_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)|\right)$
 $= \max\left(|b_{2n}|, \left|1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right| b_n\right)$
 $= |b_{2n}|$

Sur cet intervalle.

B_{2n+1} est concave ou convexe, et $B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1) = 0$

$|B_{2n+1}|$ est alors concave et sa courbe est donc en dessous de sa tangente en 0, qui a pour équation

$$y = |(2n+1) B_{2n}(0) (x-0) + B_{2n+1}(0)| \\ = |(2n+1) b_{2n} x| \leq |(2n+1) b_{2n} \frac{1}{2}|$$

puisque c'est une droite à coeff directeur positif sur $]0, \frac{1}{2}[$.

On obtient donc $|B_{2n+1}| \leq |(n + \frac{1}{2}) b_{2n}|$

Sur l'autre intervalle $] \frac{1}{2}, 1[$ le résultat est conservé grâce à (4)

(15) On a

$$\int_0^1 B_{2m+1}(x) f^{(2m+1)}(x) dx \\ = \left[\frac{1}{2m+2} \left(B_{2m+2}(x) f^{(2m+1)}(x) - \frac{1}{2m+3} B_{2m+3}(x) f^{(2m+2)}(x) \right) \right]_0^1 \\ + \frac{1}{(2m+2)(2m+3)} \int_0^1 B_{2m+3}(x) f^{(2m+3)}(x) dx$$

$$= \frac{b_{2(m+1)}}{2(m+1)} \left(f^{(2(m+1)-1)}(1) - f^{(2(m+1)-1)}(0) \right) + \frac{(2m+3)!}{(2m+1)!} B_{2m+3}(x) f^{(2m+3)}(x) dx$$

et la récurrence montre la formule.