

DS 5
du 17/12/2025

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.
Faites attention au soin apporté à votre présentation et à la justesse de votre rédaction.
Durée : 4 heures.

EXERCICE 1

On considère une fonction $\mathcal{C}^1$ et convexe, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On veut montrer que

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

- ① Montrer que, pour tout $x_0 \in [a, b]$, en utilisant les tangentes de la courbe,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \geq f(x_0) + f'(x_0) \left(\frac{a+b}{2} - x_0 \right).$$

- ② Écrire l'inégalité qui correspond au fait que la courbe de f est en dessous de sa corde $[a, b]$.
 ③ En déduire des deux questions précédentes, l'encadrement voulu.

EXERCICE 2

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante

$$\forall (x, h) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+h) = f(x) + hf'\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

- ① Montrer, par récurrence, que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
 ② En dérivant par rapport à h , montrer que f''' est la fonction nulle.
 ③ Conclure pour la forme de f . *On pourra résoudre $y''' = 0$.*
 ④ Faire la synthèse.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan(x)$.

- ① Calculer f' et f'' .
 ② Montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(k)}(-x) = (-1)^{k+1} f^{(k)}(x)$.
 En déduire suivant les valeurs de k la parité de $f^{(k)}$.
 ③ Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Démontrer par récurrence qu'il existe une fonction polynômiale P_n tel que

$$(*)_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n} \quad \text{et} \quad nP_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (x^2+1)P'_n(x) = 0 \quad (**) \quad .$$

- ④ En utilisant $(*)_2$, montrer que P_n est de degré $n-1$ et préciser son coefficient dominant, c'est à dire celui devant son monôme de plus haut degré.
 ⑤ En utilisant $(*)_1$, montrer que si n est pair, P_n ne contient que des puissances impaires, et que si n est impair, P_n ne contient que des puissances paires. *On pourra regarder la parité de la fonction P_n .*

- 2/4 ⑥ (a) En dérivant le produit $(1+x^2)f'(x)$ par la formule de Leibniz, trouver, pour $n \geq 2$, une relation entre $f^{(n+1)}$, $f^{(n)}$ et $f^{(n-1)}$.
- 1/4 (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) - 2xP_n(x) + (1+x^2)P_{n-1}(x) = 0$
et $P'_n(x) = nP_{n-1}(x)$.
- 1/4 (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)P''_n(x) - 2x(n-1)P'_n(x) + n(n-1)P_n(x) = 0$.

EXERCICE 4

Ce problème étudie dans une première partie des propriétés des polynômes de Bernoulli dans une première partie, afin d'obtenir la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin dans une deuxième partie, permettant dans une troisième partie de trouver des développements asymptotiques de suites.

PARTIE A -

- ① Montrer qu'il existe une suite unique de polynôme $B_n(x)$ vérifiant les conditions suivantes

$$B_0(x) = 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, B'_n(x) = nB_{n-1}(x) \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_n(x)dx = 0$$

- ② Calculer B_1, B_2, B_3 et B_4 .
- ③ Montrer, en intégrant B'_n , que $\forall n \geq 2, B_n(0) = B_n(1)$
- ④ Montrer que $\forall n \geq 1, B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$
- ⑤ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, que dire de $B_{2n+1}(0)$ et de $B_{2n+1}(\frac{1}{2})$, pour $n \in \mathbb{N}$?
- ⑥ Montrer que $\forall n \geq 1, B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$
- ⑦ En déduire, une formule qui exprime $S_n(p) = 1^n + 2^n + \dots + p^n$ en fonction de B_{n+1} .
On pensera à une somme télescopique.
Retrouver ainsi les valeurs des sommes $S_1(p), S_2(p)$ et $S_3(p)$.
- ⑧ On pose $b_n = B_n(0)$. Montrer que $B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k x^{n-k}$.
- ⑨ En déduire une formule de récurrence portant uniquement sur les $(b_k)_{0 \leq k \leq n-1}$.
- ⑩ Calculer b_5 et b_6
- ⑪ Montrer que $B_n(x) + B_n\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} B_n(2x)$
- ⑫ En déduire une évaluation de $B_n(\frac{1}{2})$ en fonction de b_n et de n .
- ⑬ Montrer que B_{2n+1} garde un signe constant sur $]0, \frac{1}{2}[$ et que B_{2n} est strictement monotone sur cet intervalle.
- ⑭ En déduire que $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, |B_{2n}(x)| \leq |b_{2n}|$ et $|B_{2n+1}(x)| \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) |b_{2n}|$.

PARTIE B -

- ⑮ Soit f une fonction de classe C^{2m+1} sur $[0, 1]$. Etablir la formule, grâce à une récurrence et un IPP

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \sum_{p=1}^m \frac{b_{2p}}{(2p)!} \left(f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0) \right) - \frac{1}{(2m+1)!} \int_0^1 B_{2m+1}(x) f^{(2m+1)}(x) dx.$$

PARTIE C -

On rappelle (ou on admet... au choix) que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge vers un réel noté γ , appelé constante d'Euler. Le but de la troisième partie est de trouver des suites qui convergent plus rapidement vers γ que la suite (u_n) . On pose $r_n = u_n - \gamma$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- (16) Soit $w_k = \int_0^1 \frac{dx}{x+k-1} - \frac{1}{k}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, **fixé**.

Montrer que la suite W définie par $W_k = w_{n+1} + w_{n+2} + \dots + w_k$, pour $k \geq n+1$, converge vers r_n .

- (17) Montrer que pour m un entier fixé non nul,

$$w_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) - \sum_{p=1}^m \frac{b_{2p}}{2p} \left(\frac{1}{(k-1)^{2p}} - \frac{1}{k^{2p}} \right) + \int_0^1 \frac{B_{2m+1}(x)}{(x+k-1)^{2m+2}} dt.$$

- (18) En déduire que $r_n = \frac{1}{2n} - \sum_{p=1}^m \frac{b_{2p}}{2p} \frac{1}{n^{2p}} + t_{n,m}$ avec $|t_{n,m}| \leq \frac{|b_{2m}|}{2n^{2m+1}}$.

En remplaçant la suite (u_n) par des suites $u_n^{(m)} = u_n - \frac{1}{2n} + \sum_{p=1}^m \frac{b_{2p}}{2p} \frac{1}{n^{2p}}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) on peut trouver une valeur de γ à 10^{-7} près en cherchant, pour quelques valeurs de m , la première valeur de n pour laquelle $|t_{n,m}| < 10^{-7}$.