

DS
du 26/3/2025

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.

CORRECTION

EXERCICE 1

- ① Pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$f_{a,b} = f_{c,d} \iff \forall x \in \mathbb{R}, f_{a,b}(x) = f_{c,d}(x) \iff \forall x \in \mathbb{R}, ax + b = cx + d.$$

En évaluant en 0, on trouve $b = d$, puis en évaluant en 1 on a $a = c$.

Le sens réciproque est immédiat, $\begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \implies \forall x \in \mathbb{R}, ax + b = cx + d.$

- ② Comme $f' = a > 0$, alors f est strictement croissante, donc f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a $f_{a,b} \circ f_{1/a, -b/a} = \text{Id}_{\mathbb{R}}$, donc $f_{1/a, -b/a} = f_{a,b}^{-1}$.

Ici, pas besoin de vérifier des deux côtés, car f est bijective.

- ③ On va montrer que G est un sous groupe de $(\text{Bij}(\mathbb{R}), \circ)$.

Evidemment, on ne montre pas que c'est un groupe directement.

- D'abord, on vient de montrer que $G \subset \text{Bij}(\mathbb{R})$.
- Ensuite, $\text{Id}_{\mathbb{R}} = f_{1,0} \in G$.
- Enfin, pour tous a, b, c et d dans $\mathbb{R}$, $f_{c,d} \circ f_{a,b}^{-1} = f_{c,d} \circ f_{1/a, -b/a} = f_{c/a, -bc/a+d} \in G$.

Donc G est bien un sous-groupe de $\text{Bij}(\mathbb{R})$, donc un groupe.

- ④ On note $Z(G)$ le centre de G . Soient $f_{a,b} \in G$ et $f_{c,d} \in Z(G)$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 = (f_{c,d} \circ f_{a,b} - f_{a,b} \circ f_{c,d})(x) = acx + cb + d - acx - ad - b = cb + d - ad - b.$$

Ceci doit être vrai pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on peut donc prendre $a = 1 = b$, qui nous donne $c = 1$.

En prenant ensuite, $a = 2$, on obtient $d = 0$. *1/4 pour $\text{Id}_{\mathbb{R}} \in Z(G)$*

Seulement l'identité $f_{1,0}$ commute avec tous les éléments de G , donc $Z(G) = \{\text{Id}_{\mathbb{R}}\}$.

- ⑤ (a) **U est un morphisme.** En effet, $U(f_{a,b} \circ f_{c,d}) = ac = ca = U(f_{c,d} \circ f_{a,b})$, pour tout a, b, c et d dans $\mathbb{R}$. *1/4*

1/4 **V n'est pas un morphisme.** Par exemple, $V(f_{1,1} \circ f_{2,1}) = 2 \neq 3 = V(f_{2,1} \circ f_{1,1})$.

- (b) On a $\ker(U) = \{f_{a,b} \in G \mid U(f_{a,b}) = 1\} = \{f_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\} = T$. *1/4*

Comme le noyau d'un morphisme est toujours un sous-groupe du groupe de départ, T est un sous groupe de G . *1/4*

- ⑥ On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{a,b}^n = f_{a^n, b \sum_{i=0}^{n-1} a^i}$.

On a d'abord $f_{a,b} = f_{a^1, b \sum_{i=0}^0 a^i}$.

Supposons le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors,

$$f_{a,b}^{n+1} = f_{a,b} \circ f_{a,b}^n = f_{a,b} \circ f_{a^n, b \sum_{i=0}^{n-1} a^i} = f_{a^{n+1}, ab \sum_{i=0}^{n-1} a^i + b} = f_{a^{n+1}, b \sum_{i=0}^n a^i}. \text{ D'où l'hérédité de la proposition.}$$

- ⑦ Grâce à la question précédente et la question ①, on peut affirmer qu'un élément $f_{a,b} \in G$ d'ordre fini, vérifierait

$$\begin{cases} a^n = a \\ b \sum_{i=0}^{n-1} a^i = b \end{cases} \quad \text{On aurait donc } a = \pm 1, \text{ puisque } a \text{ est non nul.}$$

- Si $a = 1$, alors $b = 0$ et on a donc $f_{a,b} = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

- Si $a = -1$, alors n est impair et b est quelconque dans $\mathbb{R}$. En effet, on remarque que $f_{-1,b}$ est fini d'ordre 2.

- ⑧ On peut mettre tous les $f_{-1,b}$ que l'on veut dans un sous groupe fini, puisqu'ils n'engendrent aucun élément supplémentaire. Comme on a montré que tout autre élément de G n'est pas fini, alors ce sont les seuls sous groupes finis.

On peut écrire, pour toute partie A de $\mathbb{R}$, un sous-groupe de G fini :

$$G_A := \{f_{-1,b} \mid b \in A\} \cup \{\text{Id}_{\mathbb{R}}\}.$$

EXERCICE 2: UNE SUITE RÉCURRENTÉ LINÉAIRE D'ORDRE 3

Evidemment, on ne montre pas que c'est un espace vectoriel...

- ① On montre que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On a en effet, $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et E non vide, puisque la suite nulle vérifie clairement l'équation.

Soient $u, v \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$(\lambda u + v)_{n+3} = \lambda u_{n+3} + v_{n+3} = -\lambda u_{n+2} + 5\lambda u_{n+1} - 3\lambda u_n - v_{n+2} + 5v_{n+1} - 3v_n = -(\lambda u + v)_{n+2} + 5(\lambda u + v)_{n+1} - 3(\lambda u + v)_n,$$

Ce qui prouve que $\lambda u + v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et donc que E est un espace vectoriel.

- ② Prenons $v \in E$. Supposons que v_0, v_1 et v_2 sont trois réels fixés.

Donc $v_3 = -v_2 + 5v_1 - 3v_0 \in \mathbb{R}$ et est unique.

Donc $v_4 = -v_3 + 5v_2 - 3v_1 \in \mathbb{R}$ et est unique.

... Par récurrence immédiate, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est déterminée de manière unique.

1/4 pour une preuve sur les premiers termes.

- ③ Procédons par récurrence. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{H}(n) : J^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$.

- Initialisation. $J^0 = I_3$, ce qui prouve bien $\mathcal{H}(0)$.

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{H}(n)$. On a alors :

$$J^{n+1} = J^n \times J \underset{\mathcal{H}(n)}{=} \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^{n+1} \end{pmatrix}$$

ce qui montre $\mathcal{H}(n+1)$.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

pour trouver l'hypothèse de récurrence, on pouvait conjecturer en faisant les premières puissance de J , ou encore décomposer J en $I_3 + B$ et utiliser le binôme de Newton.

- ④ Soit $n \in \mathbb{N}$. L'égalité $V_{n+1} = AV_n$ signifie que $\begin{pmatrix} v_{n+3} \\ v_{n+2} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_{n+2} + 5v_{n+1} - 3v_n \\ v_{n+2} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$, ce qui est vrai.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{H}(n) : [V_n = A^n \cdot V_0]$.

- Initialisation. $\mathcal{H}(0)$ signifie que $V_0 = V_0$, ce qui est vrai.

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(n)$. On a alors :

$$V_{n+1} = AV_n \underset{\mathcal{H}(n)}{=} AA^n V_0 = A^{n+1} V_0$$

ce qui montre $\mathcal{H}(n+1)$.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

- ⑤ (a) On trouve

$$P^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -5 & 6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2

Sur la copie, on peut vérifier que son produit avec P donne la matrice identité.

1 (b) Calcul direct.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{H}(n) : [A^n = PJ^n P^{-1}]$.

- Initialisation. $\mathcal{H}(0)$ signifie que $I_3 = PI_3 P^{-1}$, ce qui est vrai.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(n)$. On a alors :

1

$$A^{n+1} = A^n \times A \underset{\mathcal{H}(n)}{=} PJ^n \underbrace{P^{-1}P}_{=I_3} JP^{-1} = PJ^{n+1} P^{-1}$$

ce qui montre $\mathcal{H}(n+1)$.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

(6) Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule

$$V_n = \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix} = PJ^n P^{-1} V_0 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -5v_2 + 6v_1 + 27v_0 + (n+3)(4v_2 + 8v_1 - 12v_0) + 9(-3)^n(v_2 - 2v_1 + v_0) \\ -5v_2 + 6v_1 + 27v_0 + (n+2)(4v_2 + 8v_1 - 12v_0) - 3(-3)^n(v_2 - 2v_1 + v_0) \\ -5v_2 + 6v_1 + 27v_0 + (n+1)(4v_2 + 8v_1 - 12v_0) + (-3)^n(v_2 - 2v_1 + v_0) \end{pmatrix}$$

Dans le cas particulier donné dans l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4n + 7 + 9(-3)^n \\ 4n + 3 - 3(-3)^n \\ 4n - 1 + (-3)^n \end{pmatrix}$.

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_n = 4n - 1 + (-3)^n}$.

EXERCICE 3

(0) Par analyse-synthèse.

(1) Les fonctions $\cos$ et ch sont continues sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos(x)\cos(y)$$

et également

$$2\text{ch}(x)\text{ch}(y) = 2\frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y}}{2} = \text{ch}(x) + \text{ch}(y)$$

On en déduit que $\cos$ et ch appartiennent à $\mathcal{E}$.

(2) Par opérations sur les fonctions continues, f_α est continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f_\alpha(x+y) + f_\alpha(x-y) = f(\alpha x + \alpha y) + f(\alpha x - \alpha y) = 2f(\alpha x)f(\alpha y) = 2f_\alpha(x)f_{\alpha(y)}$$

et donc $f_\alpha \in \mathcal{E}$.

(3) Clairement non ! Prenons $f \in \mathcal{E}$. Si $\mathcal{E}$ était un espace vectoriel, alors $2f \in \mathcal{E}$, ce qui n'est pas le cas.

(4) (a) En évaluant l'équation vérifiée par f en $x = y = 0$, on trouve $2f(0) = 2f(0)^2$. On en déduit que $f(0)(1 - f(0)) = 0$, donc que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

1,5 (b) Si $f(0) = 0$, pour $x \in \mathbb{R}$, on obtient $2f(x) = 2f(x)f(0) = 0$, donc f est la fonction nulle.

1,5 (c) Si $f(0) = 1$, pour $y \in \mathbb{R}$, on obtient $f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y) = 2f(y)$, donc $f(-y) = f(y)$. Ceci prouve que f est paire.

(5) Soit $x \in \mathbb{R}$. En dérivant la relation $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ par rapport à y , on obtient $f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y)$. On dérive une nouvelle fois et on trouve ce que demande l'énoncé.

(6) En posant $\lambda = f''(0)$, on obtient exactement ce qu'on veut.

(7) Si $\mu > 0$, les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x}$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Si $\mu < 0$, ce sont les fonctions $x \mapsto A\cos(\sqrt{-\mu}x) + B\sin(\sqrt{-\mu}x)$.

Si $\mu = 0$ ce sont les fonctions affines.

(8) Il s'agit de faire une synthèse. Si f est un élément de $\mathcal{E}$ deux fois dérivable, f pourrait bien être la fonction nulle. Ce cas est réglé, maintenant regardons ce qui se passe si f n'est pas la fonction nulle.

Premier cas. μ est une constante strictement positive et f est $x \mapsto Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x}$. Peut-elle être solution?

Déjà, il faut que f soit paire, et ça force l'égalité $A = B$. Ensuite, il faut que $f(0) = 1$, et ça force $A = B = \frac{1}{2}$. Donc f est $x \mapsto \cosh(\sqrt{\mu}x)$. Maintenant, soit on vérifie qu'une telle fonction est solution en faisant un calcul pénible, soit on se sert des deux premières questions pour voir que c'est direct (avec $\alpha = \sqrt{\mu}$).

Deuxième cas. μ est une constante strictement négative et f est $x \mapsto A \cos(\sqrt{-\mu}x) + B \sin(\sqrt{-\mu}x)$. Là encore, par parité on a forcément $B = 0$. Et comme $f(0) = 1$, on obtient $A = 1$. Donc f est $x \mapsto \cos(\sqrt{-\mu}x)$. Réciproquement, cette fonction est bien solution.

Enfin, si $\mu = 0$, f est $x \mapsto Ax + B$; par parité, $A = 0$ et puisque $f(0) = 1$, c'est que $B = 1$. Réciproquement cette fonction est bien solution. Bilan : les fonctions deux fois dérivables de $\mathcal{E}$ sont les fonctions constantes égales à 0 et à 1, les fonctions $x \mapsto \cos(\alpha x)$ avec $\alpha > 0$ et $x \mapsto \cosh(\alpha x)$ avec $\alpha > 0$.

- 9) Puisque f n'est pas la fonction nulle, c'est que $f(0) = 1$ (c'est la contraposée de 2.3.b). f est censée s'annuler en un point disons x , qui du coup est non nul; si $x > 0$, c'est gagné; si $x < 0$, par parité, f s'annule aussi en $-x$ qui a le bon goût d'être strictement positif.

- 10) (a) E est inclus dans $\mathbb{R}$, est non vide d'après la question précédente, et est minorée par 0. Elle admet donc une borne inférieure.

- (b) Supposons $f(a) \neq 0$. Il existe donc, par continuité de f en a , un voisinage de a de la forme $[a - \delta, a + \delta]$ (avec $\delta > 0$) sur lequel f ne s'annule pas. Mais alors E est minoré par $a - \delta < a$ alors que a est censé être le plus petit des minorants! C'est insupportable, il y a une contradiction. Donc $f(a) = 0$.

- (c) Puisque $f(0) \neq 0$ et $f(a) = 0$, c'est que $a \neq 0$. Mais a , borne inférieure d'un ensemble de réels positifs, est elle-même positive. Par conséquent, $a > 0$.

- (d) Par définition de a , pour $x \in [0, a[$, on a $f(x) \neq 0$. Soit $x \in [0, a[$ tel que $f(x) < 0$. Puisque $f(0) = 1$, par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $y \in]0, x[$ tel que $f(y) = 0$. C'est impossible vu ce qu'on a dit, donc x n'existe pas et on a bien que pour tout $x \in [0, a[$, $f(x) > 0$.

- 11) (a) Dans l'équation fonctionnelle en posant $x = y = \frac{a}{2^{q+1}}$, on trouve... exactement ce qu'on veut.

- (b) Pour $q = 0$, $f(a)$ et $g(a)$ valent 0 tous les deux. Si c'est vrai pour $q \in \mathbb{N}$, alors $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$, et d'après l'hypothèse de récurrence, $f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2^{q+1}}\right)$. Donc : $\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2^{q+1}} + 1\right) = \cos^2\frac{\pi}{2^{q+2}}$ car $1 + \cos(x) = 2\cos^2\frac{x}{2}$. Comme $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) > 0$ et $\cos\frac{\pi}{2^{q+2}} > 0$, on obtient que $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) = \cos\frac{\pi}{2^{q+2}} = g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$, et la récurrence est établie.

- (c) Par récurrence double. Pour $p = 0$, les deux termes valent 1; pour $p = 1$, c'est la question précédente.

Si c'est valable pour p et $p-1$ (avec $p \geq 1$), en posant $x = \frac{pa}{2^q}$ et $y = \frac{a}{2^q}$, on obtient $f\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right) + f\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right) = 2f\left(\frac{pa}{2^q}\right)f\left(\frac{a}{2^q}\right)$.

- (d) Par hypothèse de récurrence, $f\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right) = 2f\left(\frac{pa}{2^q}\right)f\left(\frac{a}{2^q}\right) - f\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right) = 2g\left(\frac{pa}{2^q}\right)g\left(\frac{a}{2^q}\right) - g\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right)$. Mais $2g\left(\frac{pa}{2^q}\right)g\left(\frac{a}{2^q}\right) - g\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right) = 2\cos\frac{p\pi}{2^{q+1}}\cos\frac{\pi}{2^{q+1}} - \cos\frac{(p-1)\pi}{2^{q+1}} = g\left(\frac{(p+1)a}{2^{q+1}}\right)$ car $2\cos(x)\cos(y) - \cos(x-y) = \cos(x+y)$. D'où l'hypothèse au rang $p+1$!

- (d) La parité de f et g permettent de revenir au cas $p \in \mathbb{N}$ si p s'avère négatif.

- 12) (a) Posons $u_n = \frac{\lfloor \frac{2^n x}{2^n} \rfloor a}{2^n}$. Puisque $\frac{2^n x}{a} - 1 \leq \lfloor \frac{2^n x}{a} \rfloor \leq \frac{2^n x}{a}$, on obtient que $x - \frac{a}{2^n} \leq u_n \leq x$. D'où le résultat par encadrement.

- (b) Si $x \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie à la question précédente est à valeurs dans D_a et converge vers x . Par continuité de f et g , les suites $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $f(x)$ et $g(x)$. Mais d'après la question 10, en fait ces suites sont égales, donc par unicité de la limite : $f(x) = g(x)$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est bien que $f = g$.

- (c) Soit f une fonction non identiquement nulle, dans $\mathcal{E}$, et qui s'annule sur $\mathbb{R}$. On vient (analyse) de montrer qu'alors f est du type $x \mapsto \cos(\omega x)$ pour un certain $\omega > 0$.

Réciproquement (synthèse), $x \mapsto \cos(\omega x)$ avec $\omega > 0$ est bien une fonction de $\mathcal{E}$ (on l'a vu dans la question (8)), non identiquement nulle (elle vaut 1 en 0) et qui s'annule sur $\mathbb{R}$ (en $\pi\omega$ par exemple). On a donc trouvé toutes les fonctions de ce type!

EXERCICE 4

PARTIE A - UN EXEMPLE

- ① Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
 On pose $z : x \mapsto y'(x) + \frac{1}{\operatorname{th} x} y(x)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, car $\operatorname{th} x$ ne s'annule qu'en 0.
 Par exemple, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $z'(x) = y''(x) - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} \frac{y(x)}{\operatorname{th}^2(x)} + \frac{y'(x)}{\operatorname{th}(x)}$.
 Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{sh}(x)z'(x) = \operatorname{sh}(x)y''(x) - \frac{y(x)}{\operatorname{sh}(x)} + \operatorname{ch}(x)y'(x)$
 et $\operatorname{ch}(x)z(x) = \operatorname{ch}(x)y'(x) + \frac{\operatorname{ch}^2(x)}{\operatorname{sh}(x)} y(x) = \operatorname{ch}(x)y'(x) + \frac{1 + \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{sh}(x)} y(x)$.
 On a alors, $\operatorname{sh}(x)z'(x) + \operatorname{ch}(x)z(x) = (\operatorname{sh} x)y''(x) + (2 \operatorname{ch} x)y'(x) + (\operatorname{sh} x)y(x)$.
 On a montré que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de (E') : $\operatorname{sh}(x)z' + \operatorname{ch}(x)z = 0$ soit $z' + \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} z = 0$, sur $\mathbb{R}_+^*$.
 On fait le même raisonnement sur $\mathbb{R}_-^*$.

- ② (E') est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène et $a : x \mapsto \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et admet pour primitive $A : x \mapsto \ln(|\operatorname{sh}(x)|)$.

D'après le théorème du cours, l'ensemble des solutions de (E') est $\left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{\operatorname{sh}(x)} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

On fait le même raisonnement sur $\mathbb{R}_-^*$, et on trouve le même ensemble des solutions. *Attention, la constante sur le premier ensemble n'a aucune raison d'être la même que la deuxième en cas de réunion sur $\mathbb{R}^*$.*

- ③ (a) On continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On a montré que y est solution de (E) si et seulement s'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) + \frac{1}{\operatorname{th} x} y(x) = \frac{\tilde{C}_j}{\operatorname{sh}(x)}.$$

Par équivalences, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\operatorname{sh}(x)y'(x) + \operatorname{ch} xy(x) = \lambda \iff \left(\frac{d}{dx} \operatorname{sh}(x)y(x) \right) = \lambda \iff \operatorname{sh}(x)y(x) = \lambda x + \mu,$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}_+^*$ les solutions de (E) sont donc exactement les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{\lambda x + \mu}{\operatorname{sh}(x)} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- (b) Cherchons maintenant les solutions qui se prolongent sur $\mathbb{R}$. On rappelle que y est une solution sur $\mathbb{R}$ si

- y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- y est solution de (E) sur I_1 et sur I_2 .
- L'équation est satisfaite en 0 soit $2y'(0) = 0$.

$$\text{On pose } y(x) := \begin{cases} x \mapsto \frac{\lambda_1 x + \mu_1}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si } x > 0, \\ \frac{\lambda_2 x + \mu_2}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Par taux d'accroissement, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sh}(x)} = 1$.

Donc si μ_1 ou μ_2 sont différents de 0, la fonction y n'est pas continue en 0.

De plus, si $\mu_1 = \mu_2 = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = \lambda_1$ et de même à gauche.

Ainsi, y est continue en 0 si et seulement si $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et $\mu_1 = \mu_2$, c'est-à-dire si y est alors proportionnelle à $x \mapsto \frac{x}{\operatorname{sh}(x)}$.

PARTIE B - UN CAS INTERMÉDIAIRE

- ④ Comme y ne s'annule pas, la fonction z est dérivable et $z' = -\frac{y'}{y^2}$. Alors, l'équation en y équivaut à l'équation suivante en z obtenue en divisant par y^2

$$-z' + a(x)z + b(x) = 0.$$

- ⑤ Avec le formalisme de la première question, cette équation équivaut à $-z' + z = x$. Cette équation est linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Une solution particulière est $x \mapsto x+1$ (cas simple d'un second membre produit d'une exponentielle et d'un polynôme). Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$. Par conséquent, z est de la forme $x \mapsto x+1+Ce^x$ et y de la forme $x \mapsto \frac{1}{x+1+Ce^x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Pour terminer la question, il convient de déterminer les fonctions y de cette forme définies sur $\mathbb{R}$. On étudie pour cela les variations de $x \mapsto x+1+Ce^x$ et on trouve que la fonction s'annule seulement si $C \geq -1$. En conclusion, les solutions qui ne s'annulent pas, définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x+1+Ce^x}$ avec $C < -1$.

PARTIE C - RÉDUCTION GÉNÉRALE

- ⑥ On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme z, u sont deux fois dérivables : $y(x) = u(x)z(x)$

$$y'(x) = u(x)z'(x) + u'(x)z(x)$$

$$y''(x) = u(x)z''(x) + 2u'(x)z'(x) + u''(x)z(x)$$

y solution de (E) équivaut à

$$(E') : \forall x \in I, (a(x)u(x))z'' + (2u'(x)a(x) + b(x)u(x))z' + (a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x))z = 0$$

- ⑦ Ainsi si u vérifie l'équation : $(E'') 2a(x)u' + b(x)u = 0$, l'équation (E') est de la forme : $\alpha(x)z'' + \beta(x)z = 0$ où $\alpha(x) = a(x)u(x)$ et $\beta(x) = a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)$.

- ⑧ Si a, b, c sont des constantes, et $a \neq 0$, l'équation (E'') est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants. Les solutions sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto A \exp\left(\frac{-b}{2a}x\right) \text{ où } A \in \mathbb{R}$$

Alors, pour A non nul, on obtient : $\alpha(x) = aA \exp\left(\frac{-b}{2a}x\right)$, et $\beta(x) = \left(\frac{ab^2}{(2a)^2} + \frac{-b^2}{2a} + c\right) A \exp\left(\frac{-b}{2a}x\right) = \left(\frac{-b^2+4ac}{4a}\right) A \exp\left(\frac{-b}{2a}x\right)$

L'équation E' équivaut à : $z'' + \left(\frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right)z = 0$ On pose δ une racine carrée complexe de $\frac{-b^2+4ac}{4a^2}$. Les solutions de (E') sont : $x \mapsto Ce^{\delta x} + De^{-\delta x}$ où $C, D \in \mathbb{R}$.

PARTIE D - ENTRELACEMENT DES ZÉROS

- ⑨ Comme y_1 et y_2 sont deux fois dérivables, W est dérivable et, en utilisant les équations dont solutions y_1, y_2

$$W' = y_1 y_2'' + y_1' y_2' - (y_1'' y_2 + y_1' y_2') = -y_1 q y_2 - (-p y_1 y_2) = y_1 y_2 (p - q).$$

- ⑩ Supposons dans cette question que $\forall x \in \mathbb{R}, p(x) \geq q(x)$

- a) Comme x_1 et x_2 sont des zéros consécutifs, et que y_2 est continue sur cet intervalle, y_2 est de signe constant sur $[x_1, x_2]$.

Alors y_2 doit avoir une monotonie inverse au voisinage de x_1 et au voisinage de x_2 .

Donc $y_2'(x_1)y_2'(x_2) \leq 0$.

Supposons par l'absurde que $y_2'(x_1) = 0$. Or, pour une équation différentielle linéaire du second ordre, la

solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'' + q(x)y = 0 \\ y(x_1) = 0 \\ y'(x_1) = 0 \end{cases}$$
 est unique.

La fonction nulle $y \equiv 0$ est clairement une solution de ce problème.

Par unicité, on aurait donc $y_2 \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$, ce qui contredit l'hypothèse que y_2 est une solution non nulle.

- b) Soit $x_1 < x_2$ deux zéros consécutifs de y_2 .

Supposons que y_1 ne s'annule pas dans $[x_1, x_2]$. Comme y_1 est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème des valeurs intermédiaires, y_1 est de signe constant (car si elle changeait de signe, par le TVI, elle s'annulerait au moins une fois). De même pour y_2 , elle ne s'annule pas sur $]x_1, x_2[$ donc de signe constant.

On suppose $y_2 > 0$ sur cet intervalle ouvert. Ainsi, $y_2'(x_1) > 0$ (une preuve par l'absurde rapide montre le résultat) et de même, $y_2'(x_2) < 0$.

- Si $y_1 > 0$ sur $[x_1, x_2]$, alors W' est strictement positif sur $]x_1, x_2[$, donc W est strictement croissante sur $[x_1, x_2]$.

Or $W(x_1) = y_1(x_1)y_2'(x_1) < W(x_2) = y_1(x_2)y_2'(x_2)$ Or $W(x_1) > 0$ et $W(x_2) < 0$. Absurde.

- Si $y_1 < 0$, W est cette fois-ci strictement décroissante sur $[x_1, x_2]$ et $W(x_1) < 0$ et $W(x_2) > 0$. Absurde.

Le raisonnement est le même si $y_2 < 0$ sur $[x_1, x_2]$.

Ainsi, l'hypothèse de départ n'est pas possible : y_1 s'annule au moins une fois dans l'intervalle $[x_1, x_2]$.

- ⑪ On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, p(x) \geq \omega^2$. Dans cette question en particulier, on prend $q : x \mapsto \omega^2$.

Une solution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est $y_2 : x \mapsto \sin(\omega x)$.

Les zéros de y_2 sont $x_k = \frac{k\pi}{\omega}$ où $k \in \mathbb{Z}$, et entre deux zéros consécutifs. Ainsi construit, on a une infinité de

zéros de y_1 deux à deux distincts, donc une infinité de 0 pour y_1 .

Supposons $u_1 < u_2$ deux zéros consécutifs de y_1 tel que $u_2 - u_1 = \alpha > \frac{\pi}{\omega}$

En posant $\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{\pi}{\omega} \right) > 0$, si $v_1 = u_1 + \varepsilon$ et $v_2 = u_2 - \varepsilon$, alors $v_2 = v_1 + \frac{\pi}{\omega}$.

De plus, la fonction $y_3 : x \mapsto \sin(\omega(x - v_1))$ est solution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ et v_1 et v_2 sont deux zéros consécutifs de y_3 .

D'après la question précédente, la fonction y_1 s'annule au moins une fois dans l'intervalle $[v_1, v_2]$. Or $u_1 < v_1 < v_2 < u_2$: Absurde, puisque u_1, u_2 deux zéros consécutifs de y_1 .

Ainsi, deux zéros consécutifs de y_1 sont séparés d'au plus $\frac{\pi}{\omega}$.

- 12) Dans cette question, on prend $p = 0$. Une solution de $y'' = 0$ est la fonction constante égale à 1. Si y_2 admettait deux zéros consécutifs, alors y_1 s'annulerait au moins une fois, ce qui n'est pas possible. Donc y_2 s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.
- 13) On suppose dans cette question que $p = q$ (et donc que y_1 et y_2 sont solutions de la même équation différentielle d'ordre 2). Ainsi, on a $p \leq q$ et $q \leq p$: on peut appliquer la question 2a dans les deux sens : entre deux zéros consécutifs de y_1 se trouve au moins un zéro de y_2 et inversement. Ainsi, soit $x_1 < x_2$ deux zéros consécutifs de y_1 . En supposant que y_1 et y_2 n'ont pas de zéros communs, y_2 s'annule au moins une fois sur $]x_1, x_2[$. Si y_2 s'annulait au moins de fois, on prendrait deux zéros consécutifs dans cet intervalle, et entre ces deux zéros de y_2, y_1 s'annulerait au moins une fois: il y aurait contradiction avec le fait que x_1 et x_2 sont deux zéros consécutifs, d'où l'unicité. si y_1 et y_2 n'ont pas de zéro commun, alors y_1 admet exactement un zéro entre deux zéros consécutifs de y_2 .

PARTIE E - EQUATION DE BESSEL

Soit n le nombre de zéros sur un intervalle de longueur π d'une solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation : $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0$

On effectue les opérations de la deuxième partie afin de revenir à des équations du type de la partie 3. Soit u solution de $2u' + \frac{1}{x}u = 0$: $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ convient. Et alors, y solution de l'équation si et seulement si $z : x \mapsto \sqrt{x}y(x)$ est solution de :

$$\frac{z''}{\sqrt{x}} + \left(\frac{3}{4x^{5/2}} - \frac{1}{2x^{5/2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2} \right) \right) z = 0 \text{ Soit : } z'' + \left(1 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} \right) z = 0$$

et les zéros de y et z sont exactement les mêmes.

- si $|\lambda| \geq \frac{1}{2}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, q(x) = 1 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} \leq 1 = p(x)$ et une solution de l'équation $y'' + y = 0$ est $u_a : x \mapsto \sin(x - a)$. Ainsi, d'après la partie 2, entre deux zéros de la fonction y , il existe au moins un zéro de la fonction u_1 . De plus, si $x_1 < x_2$ sont deux zéros consécutifs de y tels que $0 < x_2 - x_1 < \pi$, alors en posant $\varepsilon = \frac{\pi - (x_2 - x_1)}{2}$, et $u_1 = x_1 - \varepsilon$, la fonction u_{u_1} s'annule au moins une fois entre x_1 et x_2 , ce qui est impossible, car le zéro suivant de u_{u_1} est $u_1 + \pi$, et $u_1 < x_1 < x_2 < u_1 + \pi$. Ainsi, $n \leq 1$
- Si $|\lambda| \leq \frac{1}{2}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, p(x) = 1 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} \geq 1 = q(x)$

D'après la question 2(b) de la partie D avec $\omega = 1$, on a $n \geq 1$.