

DS 6

du 19/01/2026

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.

Faites attention au soin apporté à votre présentation et à la justesse de votre rédaction.

Vous devez choisir entre le **sujet A** comprenant les exercices **1,2,3A** et le **sujet B** comprenant les exercices **1,2,3B**. Pour ce faire, indiquer clairement sur votre première copie, **votre nom et numéro du sujet**. Toutes les feuilles doivent être numérotées.

Durée : 4 heures.

EXERCICE 1

Dans cet exercice, on fera attention de bien différencier **fonction** $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et **expression** $f(x) \in \mathbb{R}$.

On considère l'ensemble G des fonctions affines de $\mathbb{R}$ non constantes, c'est à dire des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$f_{a,b} : x \longrightarrow ax + b \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}.$$

- ① Montrer que $f_{a,b} = f_{c,d}$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$.
- ② Montrer que $f_{a,b}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui même et que son application réciproque est aussi élément de G .
- ③ Montrer que G , muni de la composition des applications, est un groupe.
- ④ Rechercher le centre de G , c'est à dire les éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G .
- ⑤ On note H l'ensemble des applications linéaires non nulles, c'est à dire de la forme

$$h_a : x \longrightarrow ax, \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}^*$$

et T l'ensemble des applications de la forme $t_b : x \longrightarrow x + b$, avec $b \in \mathbb{R}$.

On considère aussi les applications $U : (G, \circ) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$ et $V : (G, \circ) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$

$$f_{a,b} \longmapsto a \qquad f_{a,b} \longmapsto b.$$

- a) Montrer que l'une des deux applications est un morphisme de groupes, mais que l'autre non.
 - b) Étudier le noyau du morphisme, et montrer que l'un des deux ensembles, H ou T , est un sous-groupe de G .
- ⑥ Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver une formule par récurrence pour $f_{a,b}^n = f_{a,b} \circ f_{a,b} \circ \cdots \circ f_{a,b}$.
On pourra calculer $f_{a,b}^2(x)$ et $f_{a,b}^3(x)$, puis généraliser.
- ⑦ Y a-t-il des éléments d'ordre fini, c'est à dire tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $f^n = \text{Id}$.
L'ensemble de ces éléments forment ils un sous-groupe de G ?
- ⑧ Décrire alors les sous-groupes finis de G , c'est à dire de cardinal fini.

EXERCICE 2: UNE SUITE RÉCURRENTÉ LINÉAIRE D'ORDRE 3

Le but de cet exercice est de déterminer le terme général des suites de l'ensemble

$$E = \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+3} = -v_{n+2} + 5v_{n+1} - 3v_n\}.$$

Les questions ①, ②, ③, ④ et ⑤ sont indépendantes.

- ① Montrer que E est un espace vectoriel.
- ② Montrer que toute suite de E est déterminée exactement par ses 3 premiers termes, c'est à dire qu'il existe un unique suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, si v_0, v_1 et v_2 sont fixés.
On pourra vérifier, par récurrence forte, que tous les termes de la suite v sont déterminés de manière unique.

③ On considère la matrice $J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer J^n .

④ Soit $A := \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Posons aussi pour toute suite $v \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne

$$V_n := \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_n = A^n V_0$.

⑤ On pose $P := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

① Montrer que P est inversible, et calculer P^{-1} .

On pourra prendre la peine de s'appliquer et de vérifier que $PP^{-1} = I_3$, car le résultat est utile plus tard.

② Montrer que $A = PJP^{-1}$, par le calcul.

③ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PJ^nP^{-1}$.

⑥ Utiliser les résultats obtenus dans les questions ③, ④ et ⑤, pour trouver une expression explicite de V_n en fonction de n , puis le terme général de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, en fonction de v_0, v_1 et v_2 .

Faire les produits matriciels de droite à gauche est parfois plus judicieux que l'inverse.

Appliquer le résultat à la suite $v \in E$, définie par $v_0 = 0, v_1 = 0, v_2 = 1$.

EXERCICE 3A

Le but de ce problème est d'étudier l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Les parties **B** et **C** sont indépendantes.

⑦ Quel mode de raisonnement est adapté pour résoudre ce type de problème?

PARTIE A - GÉNÉRALITÉS

① Montrer que les fonctions $\cos$ et $\sinh$ appartiennent à $\mathcal{E}$.

② Soit f dans $\mathcal{E}$. Montrer que pour tout réel α , la fonction $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{E}$.

$$x \mapsto f(\alpha x)$$

③ $\mathcal{E}$ est-il un espace vectoriel ?

④ Soit f dans $\mathcal{E}$. Montrer que

① $f(0)$ vaut 0 ou 1 ;

② Si $f(0) = 0$, alors f est identiquement nulle;

③ Si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.

PARTIE B - AVEC UNE HYPOTHÈSE SUPPLÉMENTAIRE

Dans cette partie, on cherche à déterminer quelles sont les fonctions de $\mathcal{E}$ qui sont deux fois dérivables. On fixe f une telle fonction.

⑤ Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$$

⑥ En déduire qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \lambda f(x)$$

- ⑦ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + \mu y = 0$ en séparant les cas $\mu > 0$, $\mu < 0$ et $\mu = 0$.
- ⑧ En déduire soigneusement les éléments de $\mathcal{E}$ qui sont deux fois dérivables.

PARTIE C - SANS HYPOTHÈSE SUPPLÉMENTAIRE

Dans cette partie, on ne fait plus d'hypothèse supplémentaire sur les fonctions en jeu. On fixe $f \in \mathcal{E}$, non identiquement nulle, et qui s'annule sur $\mathbb{R}$.

- ⑨ Montrer que $f(0) = 1$ et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ⑩ On pose $E = \{x > 0 \mid f(x) = 0\}$.
- (a) Montrer que E admet une borne inférieure, que l'on note a .
 - (b) Montrer que $f(a) = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde).
 - (c) Montrer que $a > 0$.
 - (d) Montrer que $\forall x \in [0, a[, \quad f(x) > 0$.
- ⑪ On pose $\omega = \frac{\pi}{2a}$ et on note $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \cos(\omega x) .$$
- (a) Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$.
 - (b) En déduire, en raisonnant par récurrence sur q , que $\forall q \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.
 - (c) En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{pa}{2^q}\right) = g\left(\frac{pa}{2^q}\right)$.
 - (d) Justifier que l'équation précédente reste vraie pour $p \in \mathbb{Z}$.
- ⑫ On pose $D_a = \left\{ \frac{pa}{2^q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$.
- (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite de terme général $\frac{\lfloor \frac{2^n x}{a} \rfloor a}{2^n}$ converge vers x .
 - (b) En déduire que $f = g$.
 - (c) Conclure très soigneusement l'exercice.

EXERCICE 3B

Dans ce problème on s'intéresse aux équations différentielles de la forme

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 ,$$

où a, b et c , sont des fonctions donc la régularité est donnée dans chaque partie.
 Les parties **A**, **B**, **C** et **D** sont indépendantes.

PARTIE A - UN EXEMPLE

L'objectif de cette partie est de résoudre l'équation

$$(\operatorname{sh} x)y'' + (2 \operatorname{ch} x)y' + (\operatorname{sh} x)y = 0 \tag{E}$$

- ① Montrer qu'une fonction y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ (respectivement sur $\mathbb{R}_-^*$) si et seulement si $z: x \mapsto y'(x) + \frac{1}{\operatorname{th} x}y(x)$ est solution d'une équation (E') d'ordre 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (respectivement $\mathbb{R}_-^*$).
- ② Résoudre (E').
- ③ (a) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
- (b) Montrer que si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors f est proportionnelle à $x \mapsto \frac{x}{\operatorname{sh}(x)}$.
La réciproque se montrera simplement plus tard dans l'année avec les développements limités.

PARTIE B - UN CAS INTERMÉDIAIRE

Considérons l'équation suivante avec a et b deux fonctions continues

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = 0.$$

Soit y est une solution de cette équation qui ne s'annule pas.

- (4) Montrer que, $z = \frac{1}{y}$ est solution d'une équation différentielle linéaire.
On pensera à expliquer pourquoi z est dérivable avant de la dériver.
- (5) Déterminer les solutions de $y' + y - xy^2 = 0$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

PARTIE C - RÉDUCTION GÉNÉRALE

Soit (E) une équation de la forme $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ avec a une fonction ne s'annulant pas. Pour toute fonction u deux fois dérivable, définissons z deux fois dérivable telle que $y = uz$.

- (6) Montrer que si y est solution de (E) , alors z est encore solution d'une équation différentielle.
- (7) En déduire que si u est solution d'une équation (E_2) linéaire d'ordre 1, à donner explicitement, alors z est solution de

$$\alpha(x)z'' + \beta(x)z = 0 \quad (E_1)$$

- (8) Déterminer les solutions de (E_2) puis de (E_1) correspondante dans le cas où les fonctions a, b, c sont constantes.
Faire le cas complexe, comme a priori, les fonctions ne sont pas réelles ici.

PARTIE D - ENTRELACEMENT DES ZÉROS

Soit p, q deux fonctions, et y_1, y_2 des solutions non nulles des équations $(F_1) : y'' + p(x)y = 0$ et $(F_2) : y'' + q(x)y = 0$ respectivement. On admet que les zéros de ces solutions sont isolés, c'est-à-dire que pour chaque zéro, il existe un intervalle ouvert ne contenant que ce zéro. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

Rappel : un zéro d'une fonction f est un réel x tel que $f(x) = 0$.

- (9) Donner une expression simple de la dérivée de W .
- (10) Supposons dans cette question que $\forall x \in \mathbb{R}, p(x) \geq q(x)$. Soit $x_1 < x_2$ deux zéros consécutifs de y_2 .
- (a) Montrer que $y_2'(x_1)y_2'(x_2) < 0$.
- (b) Montrer que y_1 admet au moins un zéro dans l'intervalle $[x_1, x_2]$.
- (11) En déduire que si p est minorée par une constante strictement positive ω^2 , alors y_1 admet une infinité de zéros, et que deux zéros consécutifs sont séparés d'au plus $\frac{\pi}{\omega}$ à trouver.
- (12) Déduire encore de (8), que, si q est majorée par 0, alors y_2 admet au plus un zéro.
- (13) On suppose dans cette question que $p = q$.
 Montrer que si y_1 et y_2 n'ont pas de zéro commun, alors y_1 admet exactement un zéro entre deux zéros consécutifs de y_2 .

PARTIE E - ÉQUATION DE BESSEL

Soit n le nombre de zéros sur un intervalle de longueur π d'une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0.$$

- (14) Montrer que si $\lambda \geq \frac{1}{2}$, alors $n \leq 1$. Que dire si $\lambda \leq \frac{1}{2}$?
 On utilisera les résultats des parties **C** et **D**.