

Exercice 1

1. Dans le cas d'une projection, on sait que $\ker(p)$ est l'espace parallèlement auquel on projette et $\text{Im}(p)$ celui sur lequel on projette. Ces deux espaces étant supposés supplémentaires dans la définition d'une projection, p vérifie donc la condition S. Pour une symétrie, c'est évidemment aussi le cas puisqu'une symétrie est toujours bijective et qu'on a donc $\text{Im}(s) = E$ et $\ker(s) = \{0\}$, qui sont évidemment supplémentaires. Le même argument prouve d'ailleurs que tout automorphisme de E vérifie la condition S.
2. Ici, $\ker(f) = \text{Vect}(1)$ (polynômes constants) et $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$ (le théorème du rang assure que l'image est de dimension 2, et le polynôme dérivé d'un polynôme appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$ étant nécessairement de degré inférieur ou égal à 1, on en déduit que l'image est nécessairement égale à $\mathbb{R}_1[X]$). Alternativement, on peut aussi calculer les images des polynômes de la base canonique, ce qui se fait immédiatement ici. Dans tous les cas, on constate que la condition S n'est pas vérifiée puisque $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \text{Vect}(1)$ n'est pas réduit au vecteur nul.
3. Le calcul de $f(M)$ donne bien une image appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, $f(\lambda M + N) = \frac{\lambda M + N + \lambda M^\top + N^\top}{2} = \lambda f(M) + f(N)$ en exploitant la linéarité de la transposition. L'application f est donc un endomorphisme, mais surtout f est une projection puisque $f(f(M)) = \frac{M^\top + (M^\top)^\top}{2} = \frac{M^\top + M}{2} = f(M)$. On a donc déjà prouvé plus haut que f satisfait à la condition S.
4. (a) La linéarité découle de celle de la dérivation. De plus, si $d^*(P) \leq 3$, on aura $d^*(P'') \leq 1$, donc $\frac{1}{2}(X^2 - 1)P'' \in E$, et de même pour le terme XP' , ce qui prouve facilement que f est un endomorphisme de E .
 (b) Calculons donc : $P' = 3aX^2 + 2bX + c$ puis $P'' = 6aX + 2b$, donc $f(P) = (X^2 - 1)(3aX + b) - 3aX^3 - 2bX^2 - cX + aX^3 + bX^2 + cX + d = aX^3 - 3aX + d - b$.
 (c) D'après le calcul précédent P appartient au noyau si $a = 0$ et $d = b$ (avec c quelconque), donc $\ker(f) = \{bX^2 + cX + b \mid (b, c) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(X^2 + 1, X)$.
 (d) On applique le théorème du rang : $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) - 2 = 2$. Il suffit donc de trouver deux polynômes de la base canonique ayant deux images non colinéaires pour connaître l'image, par exemple $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(X^3), f(1)) = \text{Vect}(X^3 - 3X, 1)$.
 (e) Soit $Q = aX^3 + bX^2 + cX + d$, donc $Q' = 3aX^2 + 2bX + c$, alors $Q \in G$ si et seulement si $3a + 2b + c = 3a - 2b + c = 0$, donc si $b = 0$ (en soustrayant les deux équations) et $c = -3a$. On peut donc écrire $G = \{aX^3 - 3cX + d \mid (a, c) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(X^3 - 3X, 1)$. Ceci prouve que G est bien un sous-espace vectoriel de E , qu'il est de dimension 2 et que $(X^3 - 3X, 1)$ en forme une base (ces deux polynômes n'étant pas proportionnels, ils forment une famille libre). Enfin, $G = \text{Im}(f)$ est évident puisqu'on a obtenu la même base pour les deux espaces.
 (f) Si on regroupe les deux bases obtenues pour le noyau et l'image de f , on obtient la famille $(X^3 - 3X, 1, X^2 + 1, X)$ qui est une famille échelonnée de quatre polynômes de E , et donc une base de E . Cela suffit à prouver que $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.
 (g) En posant $A = a$, $B = 0$, $C = -3a$ et $D = d - b$, on calcule $f(f(P)) = AX^3 - 3AX + D - B = aX^3 - 3aX + d - b = f(P)$, ce qui prouve que $f \circ f = f$ et donc que f est un projecteur.
5. (a) Le vecteur $u = (x, y, z, t)$ appartient au noyau si $y = 0$ et $z = x$, donc $\ker(f) = \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$. En particulier, $\ker(f)$ est de dimension 2, donc $\text{Im}(f)$ aussi (théorème du rang). Il suffit donc de calculer deux images non colinéaires pour obtenir une base de l'image : $f(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 3, 0)$ et $f(0, 1, 0, 0) = (0, -3, 0, 1)$, donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}((0, 0, 1, 0), (0, -3, 0, 1))$ (on a divisé par 3 la première image par souci de simplicité).

- (b) Regroupons les deux bases obtenues pour créer la famille $(e_1, e_2, e_3, e_4) = ((1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$. Supposons que la combinaison linéaire $ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ s'annule, cela se traduit par les équations $a = 0, -3d = 0, a + c = 0$ et $b + d = 0$, dont on devrait arriver à déduire assez rapidement que $a = b = c = d = 0$. La famille est donc libre, et comme elle est constituée de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$, c'en est une base, ce qui prouve que $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^4$.
- (c) On sait déjà que f n'est pas un automorphisme depuis le calcul du noyau. De plus, $f^2(x, y, z, t) = (0, 9y, -9x + 9z, -3y) = -3f(x, y, z, t)$, ce qui n'est pas vraiment caractéristique d'un projecteur (techniquement, f est la composée d'une projection et d'une homothétie).

Exercice 2

- 1) Voir la démonstration du cours « Applications linéaires » proposition 14 page 13.
- 2) a)

$$x \in \text{Ker}(\tilde{g}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \text{Im}(f) \\ \tilde{g}(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \text{Im}(f) \\ g(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f).$$

- b) Comparons $rg(g \circ f)$ et $rg(\tilde{g})$.

Par définition,

$$rg(g \circ f) = \dim(g(f(E))) = \dim g(\text{Im}(f)) = rg(\tilde{g}).$$

D'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim \text{Ker}(\tilde{g}) + rg(\tilde{g})$$

D'après ce qui précède,

$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) + rg(g \circ f)$$

D'où

$$rg(g \circ f) = rg(f) - \dim(\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)).$$

- c) $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g) \Rightarrow \dim(\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)) \leq \dim \text{Ker}(g)$

D'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)) \leq \dim F - rg(g)$$

Or on sait que $rg(g \circ f) = rg(f) - \dim(\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f))$, alors

$$rg(g \circ f) - rg(f) \geq -\dim F + rg(g)$$

$$rg(g \circ f) \geq rg(f) + rg(g) - \dim(F).$$

- 3) Comme $u \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$rg(u^2) \geq rg(u) + rg(u) - \dim(E)$$

or $u^2 = u \circ u = 0$ donc $rg(u^2) = 0$, ainsi

$$0 \geq rg(u) + rg(u) - \dim(E) \Leftrightarrow rg(u) \leq \frac{\dim(E)}{2}.$$

- 4) Si $g \circ f$ est un isomorphisme entre E et G , alors f est injective (voir preuve proposition 12 du cours « Applications linéaires » page 11).
- 5) Supposons qu'il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ telles que $AB = I_3$.

On en déduit que $rg(AB) = 3$.

Or

$$A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K}) \Rightarrow rg(A) \leq 2 \text{ et } B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K}) \Rightarrow rg(B) \leq 2.$$

D'après la première question, on sait que

$$rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$$

Donc $3 \leq 2$. Absurde.

Il n'existe pas de matrices $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ telles que $AB = I_3$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

Exercice 3

1. Comme $\mathbb{R}$, le domaine de définition de la fonction g est centré en 0, alors pour tout réel x , on a

$$g(-x) = \frac{\arctan(-x)}{1 + (-x)^2} = -\frac{\arctan(x)}{1 + x^2} = -g(x)$$

car la fonction $\arctan$ est impaire sur $\mathbb{R}$

Donc g est impaire sur $\mathbb{R}$.

2. Les fonctions g et g' sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ comme quotient donc on peut leur appliquer le théorème de Taylor-Young à tout ordre en 0. Par ailleurs, g étant impaire sur $\mathbb{R}$, la partie régulière de son développement limité sera impaire et g' étant elle paire sur $\mathbb{R}$, alors sa partie régulière sera paire.

De plus, on sait grâce à Taylor Young que

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \frac{g^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} \text{ et } b_k = \frac{g^{(2k+1)}(0)}{(2k)!}$$

$$\text{Puisque } (g^{(2k)})' = g^{(2k+1)}.$$

3. a) Comme

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \frac{g^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} \text{ et } b_k = \frac{g^{(2k+1)}(0)}{(2k)!}$$

Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, b_k = (2k+1)a_k.$$

b) $\arctan(x) \sim_0 x$ et $1+x^2 \sim_0 1$ alors $g(x) \sim_0 x$.

c) Comme $g(x) \sim_0 x$ alors au voisinage de 0, $g(x) = x + o(x)$. Par unicité du $DL_1(0)$, on a $a_0 = 0$.

$$4. \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2} \times (1+x^2) - 2 \arctan(x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1 - 2 \arctan(x)}{(1+x^2)^2}$$

$$\begin{aligned} (1+x^2)g'(x) + 2xg(x) &= (1+x^2) \left(\frac{1 - 2x \arctan(x)}{(1+x^2)^2} \right) + 2x \frac{\arctan(x)}{1+x^2} \\ &= \frac{1 - 2x \arctan(x) + 2x \arctan(x)}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

La fonction g vérifie bien l'équation (E).

5. Au voisinage de 0, on a :

En troquant le développement limité de g à l'ordre $2n-1$.

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{2k+1} + o(x^{2n-1}) = \sum_{k=1}^n a_{k-1} x^{2k-1} + o(x^{2n-1}).$$

D'où

$$xg(x) = x \left(\sum_{k=1}^n a_{k-1} x^{2k-1} + o(x^{2n-1}) \right) = \sum_{k=1}^n a_{k-1} x^{2k} + o(x^{2n}).$$

En troquant le développement limité de g' à l'ordre $2n-2$.

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{2k} + o(x^{2n-2})$$

alors

$$x^2 g'(x) = \sum_{k=1}^n b_{k-1} x^{2k} + o(x^{2n})$$

$$(1+x^2)g'(x) + 2xg(x) = b_0 + \sum_{k=1}^n (b_k + b_{k-1} + 2a_{k-1}) x^{2k} + o(x^{2n})$$

$$(1+x^2)g'(x) + 2xg(x) = 1 + \sum_{k=1}^n (2k+1)(a_k + a_{k-1}) x^{2k} + o(x^{2n}).$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a au voisinage de 0

$$(1+x^2)g'(x) + 2xg(x) = 1 + \sum_{k=1}^n (2k+1)(a_k + a_{k-1})x^{2k} + o(x^{2n})$$

mais on sait aussi que pour tout réel x ,

$$(1+x^2)g'(x) + 2xg(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

On sait aussi qu'au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}).$$

Par unicité du développement limité à l'ordre $2n$,

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, (2k+1)(a_k + a_{k-1}) = (-1)^k.$$

L'entier n étant quelconque, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, (2k+1)(a_k + a_{k-1}) = (-1)^k$$

d'où

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, (-1)^k a_k = (-1)^{k-1} a_{k-1} + \frac{1}{2k+1}.$$

$$\begin{aligned} (-1)^1 a_1 &= (-1)^0 a_0 + \frac{1}{2 \times 1 + 1} \\ (-1)^2 a_2 &= (-1)^1 a_1 + \frac{1}{2 \times 2 + 1} \\ (-1)^3 a_3 &= (-1)^2 a_2 + \frac{1}{2 \times 3 + 1} \\ &\vdots \\ (-1)^k a_k &= (-1)^{k-1} a_{k-1} + \frac{1}{2k+1} \end{aligned}$$

En sommant

$$a_k = (-1)^k \sum_{i=0}^k \frac{1}{2i+1}$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, au voisinage de 0

$$\arctan(x) = P_n(x) + o(x^{2n+1}) \text{ et } \frac{1}{1+x^2} = Q_n(x) + o(x^{2n+1})$$

avec

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \text{ et } Q_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}$$

(on a $P'_n = Q_n$). Notons R_n la partie régulière du développement limité à l'ordre $2n+1$ de g en 0.

Le polynôme R_n est obtenu en ne conservant dans le produit $P_n \times Q_n$ que les termes de degrés $\leq 2n+1$.

On a donc

$$R_n = \sum_{k=0}^n a_k x^{2k+1}$$

avec

$$a_k = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{2i+1} (-1)^{k-i} = (-1)^k \sum_{i=0}^k \frac{1}{2i+1}.$$

Exercice 4

1. Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \tanh(x) - x$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, de dérivée $g'(x) = 1 - \tanh^2(x) - 1 = -\tanh^2(x) < 0$.
La fonction g est donc strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ et puisque $g(0) = 0$, on en déduit que $g(x) < 0$ pour tout $x > 0$.

2. Un calcul direct prouve que $f'(x) = \left(\tanh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) \cosh\left(\frac{1}{x}\right)$.

Comme $\cosh$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on trouve d'après la question précédente que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Calculons ses limites en 0 et en $+\infty$.

- en 0 : on pose $u = \frac{1}{x}$ et on a

$$x \sinh\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sinh u}{u} = \frac{e^u - e^{-u}}{2u} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^u}{u} - \frac{e^{-u}}{u} \right).$$

Or, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$ par croissances comparées, et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{-u}}{u} = 0$.
Finalement, on trouve que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

- en $+\infty$: on pose encore $u = \frac{1}{x}$, de sorte que

$$x \sinh(x) = \frac{\sinh u}{u} \sim_0 \frac{u}{u} = 1$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

3. C'est du cours, en utilisant le DL à l'ordre 3 de $\sinh u$:

$$\frac{\sinh u}{u} = 1 + \frac{u^2}{6} + o(u^2).$$

4. On pose $u = \frac{1}{x}$ (c'est légitime car $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$)

D'après le résultat de la question précédente. Donc, au voisinage de $+\infty$, on a

$$f(x) = \frac{\sinh u}{u} = 1 + \frac{u^2}{6} + o(u^2) = 1 + \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

5. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. C'est donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty[=]1; +\infty[$.

Comme $\frac{n+1}{n} \in]1, +\infty[$, on a bien l'existence d'un unique $u_n > 0$ tel que $f(u_n) = \frac{n+1}{n}$.

6. a) On sait que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} &= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} &\geq \frac{n+2}{n+1} \Leftrightarrow f(u_n) \geq f(u_{n+1}) \Leftrightarrow u_n \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

car f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

- b) la suite (u_n) étant croissante, ou bien elle tend vers $+\infty$, ou bien elle est majorée.

Si elle est majorée disons par M , alors on a, puisque f est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n+1}{n} = f(u_n) \geq f(M).$$

Passons à la limite : on obtient $1 \geq f(M)$. Mais $f(M) > 1$ et on a donc une contradiction.

Ainsi, (u_n) ne peut pas être majorée, et elle tend donc vers $+\infty$.

- c) Puisque u_n tend vers $+\infty$, il est légitime d'introduire u_n dans l'expression du développement asymptotique de f trouvé à la question 4. On a donc :

$$f(u_n) = 1 + \frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right)$$

Or

$$f(u_n) = \frac{n+1}{n}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n} &= 1 + \frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} &= \frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{1}{6u_n^2} \sim \frac{1}{n}.$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6u_n^2}{n} = 1$$

Sachant que la fonction racine carrée est continue en 1, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{6}u_n}{\sqrt{n}} = 1$$

Finalement

$$u_n \sim \sqrt{\frac{n}{6}}$$

7. a) Poussons le DL en 0 à l'ordre 4 de la fonction f

$$f(u_n) = 1 + \frac{1}{6u_n^2} + \frac{1}{120u_n^4} + o\left(\frac{1}{u_n^4}\right)$$

or

$$f(u_n) = \frac{n+1}{n}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n} &= 1 + \frac{1}{6u_n^2} + \frac{1}{120u_n^4} + o\left(\frac{1}{u_n^4}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} &= \frac{1}{6u_n^2} + \frac{1}{120u_n^4} + o\left(\frac{1}{u_n^4}\right) \quad (*) \end{aligned}$$

Comme $u_n \sim \sqrt{\frac{n}{6}}$ alors $u_n^4 \sim \frac{n^2}{36}$ donc $\frac{1}{u_n^4} \sim \frac{36}{n^2}$. Alors d'une part

$$\frac{1}{u_n^4} = \frac{36}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et d'autre part, $o\left(\frac{1}{u_n^4}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Finalement (*) devient,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &= \frac{1}{6u_n^2} + \frac{36}{120n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6u_n^2} &= \frac{1}{n} - \frac{3}{10n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

$$\text{b) } u_n^2 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{10n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^{-1} = \frac{n}{6} \left(1 - \frac{3}{10n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{-1}$$

On sait qu'au voisinage de 0, $(1+u)^{-1} = 1 - u + o(u)$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{3}{10n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, alors

$$\begin{aligned} u_n^2 &= \frac{n}{6} \left(1 - \left(-\frac{3}{10n} \right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{n}{6} + \frac{1}{20} + o(1) \\ u_n &= \sqrt{\frac{n}{6} + \frac{1}{20} + o(1)} = \sqrt{\frac{n}{6}} \sqrt{1 + \frac{3}{10n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

On sait qu'au voisinage de 0, $(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + o(u)$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{10n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, alors

$$u_n = \sqrt{\frac{n}{6}} \sqrt{1 + \frac{3}{10n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{\frac{n}{6}} \left(1 + \frac{3}{20n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \sqrt{\frac{n}{6}} + \frac{3}{20\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$