

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.

Faites attention au soin apporté à votre présentation et à la justesse de votre rédaction.

Toutes vos réponses doivent être justifiées.

Indiquer clairement sur votre première copie, votre nom et numéro du sujet.

Toutes les feuilles doivent être numérotées.

Durée : 4 heures.

Algèbre linéaire**Exercice 1**

On s'intéresse au problème suivant: si E est un espace vectoriel de dimension finie, quels sont les endomorphismes $f \in \mathcal{L}(E)$ pour lesquels $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$?

On appellera dans la suite de l'exercice la « condition S » le fait que $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$.

Le but de l'exercice est essentiellement d'étudier des cas particuliers de ce problème.

1. a) Si p est une projection de l'espace vectoriel E , que représentent $\ker(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$?

En déduire si p vérifie ou non la condition S.

b) Une symétrie d'un espace vectoriel E vérifie-t-elle toujours la condition S ?

2. On note $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ l'application définie par $f(P) = P'$.

Cet endomorphisme vérifie-t-il la condition S ?

3. Soit l'application $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$M \mapsto \frac{1}{2}(M + M^T)$$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Déterminer si f vérifie la condition S.

4. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Considérons l'application $f: E \rightarrow E$

$$P \mapsto \frac{X^2 - 1}{2}P'' - XP' + P$$

a) Montrer que f est un endomorphisme de E .

b) Déterminer explicitement l'image par f du polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

c) Déterminer le noyau de l'application f .

d) Préciser la dimension de l'image de f , puis en donner une base à l'aide des calculs déjà effectués.

e) On note $G = \{Q \in E \mid Q'(1) = Q'(-1) = 0\}$.

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E dont on précisera la dimension et une base, puis montrer que $G = \operatorname{Im}(f)$.

f) Montrer que $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E .

g) Montrer que f est un projecteur.

5. Soit l'application $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$(x, y, z, t) \mapsto (0, -3y, 3x - 3z, y)$$

a) Déterminer le noyau et l'image de f (on donnera la dimension et une base pour chaque sous-espace vectoriel).

b) Vérifier que f satisfait à la condition S.

c) Montrer que f n'est ni un automorphisme, ni un projecteur.

Exercice 2 Encadrement du rang d'une composée d'applications linéaires.

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

On note $\tilde{g}$ la restriction de g à $\operatorname{Im}(f)$, c'est à dire $\tilde{g} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im}(f), G)$.

1) Redémontrer le résultat de cours : $rg(g \circ f) \leq \min(rg(f), rg(g))$

2) a) Montrer que $\operatorname{Ker}(\tilde{g}) = \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$.

b) En déduire que $rg(g \circ f) = rg(f) - \dim(\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f))$.

Indication : on commencera par comparer $rg(g \circ f)$ et $rg(\tilde{g})$.

c) Montrer que : $rg(g \circ f) \geq rg(f) + rg(g) - \dim(F)$.

Les questions 3, 4 et 5 sont indépendantes entre elles.

3) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul où E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie tel que $u^2 = 0$.
Démontrer que $rg(u)$ est majoré.

- 4) Si $g \circ f$ est un isomorphisme entre E et G , que peut-on en déduire sur f ?
- 5) Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ telles que $AB = I_3$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

Analyse asymptotique

Exercice 3

On considère la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{\arctan(x)}{1+x^2}.$$

- Étudier la parité de la fonction g .
- Démontrer qu'au voisinage de 0 il existe deux suites à valeurs réelles $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n ,

$$g(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \quad \text{et} \quad g'(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^{2k} + o(x^{2n})$$

- Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, b_k = (2k+1)a_k$.
- Donner un équivalent simple de g en 0.
- Que vaut a_0 ? On n'attend pas pour réponse $a_0 = b_0$.

- Vérifier que g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E): (1+x^2)y' + 2xy = \frac{1}{1+x^2}.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer le développement limité à l'ordre $2n$ en 0 de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (1+x^2)g'(x) + 2x g(x)$ fonction des termes de la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
- En utilisant le fait que g est solution de (E), en déduire une relation de récurrence vérifiée par la suite $((-1)^k a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, puis exprimer le terme général de la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en faisant intervenir une somme.
- Retrouver ce résultat en considérant le produit des parties régulières des développements limités de $\arctan$ et de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \sinh\left(\frac{1}{x}\right)$.

On rappelle que $\sinh$ désigne la fonction sinus hyperbolique, $\cosh$ la fonction cosinus hyperbolique et $\tanh$ la fonction tangente hyperbolique.

- Montrer que : $\forall x > 0, \tanh(x) < x$.
- En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$. On précisera les limites aux bornes de l'intervalle de définition.
- Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $u \mapsto \frac{\sinh(u)}{u}$.

- En déduire que la fonction f admet au voisinage de $+\infty$ un développement limité de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

où a_0, a_1, a_2 sont des nombres réels à préciser.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution $u_n > 0$.
- Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.
 - Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.
- L'objectif de cette question est de déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n au voisinage de $+\infty$.
 - Démontrer que $\frac{1}{6u_n^2} = \frac{1}{n} - \frac{3}{10n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
 - Conclure.