

DS

du 26/3/2025

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.

CORRECTION

ALGÈBRE LINÉAIRE

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \longmapsto (2x + y - z, x + y)$.

Matrice de f dans les bases canoniques :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Base du noyau de f :

$$\{(1, -1, 1)\}$$

Base de l'image de f :

$$\{(1, 0), (0, 1)\}$$

On considère l'endomorphisme $s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \longmapsto (-x - 4y - 2z, 4x + 9y + 4z, -8x - 16y - 7z)$.

Expliquer comment montrer que s est une symétrie (ne pas faire les calculs explicitement) et donner ses espaces caractéristiques.

On montre que $s^2(x, y, z) = (x, y, z)$, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
 s est alors une symétrie, en particulier par rapport à $\ker(s - \text{Id})$ parallèlement à $\ker(s + \text{Id})$, où

$$\ker(s + \text{Id}) = \text{Vect}\{(1, -2, 4)\}$$

et $\ker(s - \text{Id}) = \text{Vect}\{(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

Soit l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto (X - 1)P'(X) + P(X + 1)$ de $\mathbb{R}_4[X]$.

Matrice de φ dans les bases canoniques :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Rang de φ :

$$5$$

Base du noyau de φ :

$$\emptyset$$

Base de l'image de f :

$$\{1, X, X^2, X^3, X^4\}$$

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\text{Id} = 0$.
 Montrer que f est un isomorphisme, puis que $F := \ker(f - \text{Id})$ et $G := \ker(f - 2\text{Id})$ sont supplémentaires dans E .

On pourra utiliser le fait que $x = (f(x) - x) - (f(x) - 2x)$, pour tout $x \in E$.

L'équation de l'énoncé se réécrit $f \circ (f - 3\text{Id}) = (f - 3\text{Id}) \circ f = 2\text{Id}$.

Donc f est un isomorphisme et $f^{-1} = \frac{1}{2}(f - 3\text{Id})$.

Soit $x \in \ker(f - \text{Id}) \cap \ker(f - 2\text{Id})$. Par définition, on a $f(x) = x = 2x$, d'où $x = 0_E$.

De plus, pour tout $x \in E$, $x = (f(x) - x) - (f(x) - 2x)$,
et on voit que $f(x) - x \in \ker(f - 2\text{Id})$ et $f(x) - 2x \in \ker(f - \text{Id})$.

Les deux espaces sont donc supplémentaires.

INTÉGRATION

Donner un équivalent simples des expressions suivantes

$$\sum_{k=1}^n \frac{k-n}{k^3+n^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$$

$$-\frac{2}{3n} \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^n k \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$$

$$\frac{4n^2}{\pi^2}$$

Calculer les limites suivantes, en utilisant une majoration ou une minoration grossière d'une partie des intégrandes.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx =$$

$$0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{t \, dt}{\ln(t)} =$$

$$+\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{x^2} \frac{e^t \cos(t) \, dt}{t} =$$

$$+\infty$$

Donner une expression simple des primitives suivantes.

$$\int \frac{x+1}{x^2+1} dx =$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan(x) + C$$

$$\int \cos(2 \ln(t)) \, dt + C$$

$$\frac{t}{5} (\cos(2 \ln t) + 2 \sin(2 \ln t))$$

Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_{-1}^1 t^2 \sqrt{1-t^2} \, dt$$

$$\pi/8$$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dt}{\cos(t)}$$

$$\frac{\ln 3}{2}$$

EXERCICE 1: TRANSFORMÉE DE CESÀRO

PARTIE A - EXEMPLES

- ① Par définition, $f^*(0) = 0$. En procédant par intégration par parties, on obtient

$$\forall x > 0, \quad \boxed{f^*(x) = \arctan x - \frac{1}{2x} \ln(1+x^2)}.$$

Comme $\ln(1+x^2) = 2 \ln x + \ln(1 + \frac{1}{x^2}) = +\infty o(x)$, on en déduit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$ et $\boxed{f^*(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}}$.

- ② On a, pour tout $x > 0$, $\int_0^x t \sin(t^2) dt = \frac{1}{2x} \int_0^x \sin u du = \frac{1 - \cos(x)}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

- ③ (a) $f(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \rightarrow +\infty$ donc la fonction f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

- (b) Commençons par trouver une expression plus maniable de f^* en utilisant la relation de Chasles en 1 et une intégration par parties (en dérivant la racine).

$$f^*(x) = \frac{1}{x} \left(\int_0^1 f(t) dt + [\sqrt{t}(-\cos t)]_1^x - \int_1^x \frac{1}{2\sqrt{t}}(-\cos t) dt \right)$$

D'une part, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\int_0^1 f(t) dt + [\sqrt{t}(-\cos t)]_1^x \right) = 0$ (produit d'un terme de limite nulle et d'un terme borné). D'autre part,

$$0 \leq \left| \frac{1}{x} \int_1^x \frac{1}{2\sqrt{t}}(-\cos t) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_1^x \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1}}{x}$$

et ce dernier terme tend vers 0. Par encadrement, f^* tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

PARTIE B - PROPRIÉTÉS DE f^*

- ④ Comme f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, elle admet une primitive F d'après le théorème fondamental de l'analyse. On a alors, par taux d'accroissement,

$$f^*(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{F(x) - F(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(0).$$

ce qui montre la continuité de f en 0.

- ⑤ Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x \geq A, \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $x \geq A$,

$$\begin{aligned} |f^*(x) - \ell| &= \frac{1}{x} \left| \int_0^x (f(t) - \ell) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{x} \int_0^A |f(t) - \ell| dt + \frac{1}{x} \int_A^x |f(t) - \ell| dt \\ &\leq \frac{1}{x} \int_0^A |f(t) - \ell| dt + \varepsilon \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^A |f(t) - \ell| dt = 0$ donc il existe $B > 0$ tel que

$$\forall x \geq B, \quad \frac{1}{x} \int_0^A |f(t) - \ell| dt \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, pour tout $x \geq \max(A, B)$, $|f^*(x) - \ell| \leq 2\varepsilon$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^*(x) = \ell$.

- ⑥ L'hypothèse de l'énoncé se traduit par $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \alpha x - \beta = 0$. On utilise alors la question précédente avec la fonction $g : x \mapsto f(x) - \alpha x - \beta$. On obtient que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g^*(x) = 0$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g^*(x) = f^*(x) - \frac{\alpha}{2}x - \beta$. En conclusion, la courbe représentative de la fonction f^* admet l'asymptote d'équation $y = \frac{\alpha}{2}x + \beta$ au voisinage de $+\infty$.
- ⑦ Notons P_n la partie régulière du développement limité de f à l'ordre n en 0.
Alors, par primitivation des DLs, $\int_0^x f(t)dt$ admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 de partie régulière $\int_0^x P_n(t)dt$. Ainsi, f^* admet un développement limité à l'ordre n en 0 de partie régulière $\frac{1}{x} \int_0^x P_n(t)dt = P_n^*(x)$.
- ⑧ (a) Le changement de variables $t = xu$ donne, pour tout $x > 0$, $f^*(x) = \int_0^1 f(xu)du$.
- (b) Ainsi, pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^*$, tels que $x \geq x'$, $f^*(x) - f^*(x') = \int_0^1 (f(xu) - f(x'u))du$.
Si f est croissante, alors le second membre de l'identité précédente est positif, comme intégrale d'une fonction positive), donc f^* est croissante. La même preuve conclut sur le cas f décroissante.
- ⑨ (a) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{1}{x} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x}{T} \rfloor - 1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt + \int_{\lfloor \frac{x}{T} \rfloor T}^x f(t)dt \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x}{T} \rfloor - 1} \int_0^T f(t + kT)dt + \int_{\lfloor \frac{x}{T} \rfloor T}^x f(t)dt \right) \\ &= \frac{1}{x} \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor \int_0^T f(t)dt + \frac{1}{x} \int_{\lfloor \frac{x}{T} \rfloor T}^x f(t)dt. \end{aligned}$$

- (b) De plus, $\left| \frac{1}{x} \int_{\lfloor \frac{x}{T} \rfloor T}^x f(t)dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^T |f(t)|dt$ donc, par encadrement, $\frac{1}{x} \int_{\lfloor \frac{x}{T} \rfloor T}^x f(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
On obtient donc

$$f^*(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt.$$

PARTIE C - INÉGALITÉ DE HARDY

- ⑩ On a, pour tout $x > 0$, $x(f^*)^2(x) = \frac{1}{x} \left(\int_0^x f(t)dt \right)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc cette fonction est prolongeable par continuité en 0.
De même, le taux d'accroissement tend vers $(f)^2(0)$.
- ⑪ La fonction $x \mapsto x(f^*)^2(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est $x \mapsto 2f(x)f^*(x) - (f^*)^2(x)$.
- ⑫ On a, pour tout $x > 0$, $\int_0^x (4f^2(t) - (f^*)^2(t))dt = \int_0^x (2f(t) - f^*(t))^2 dt + 2 \int_0^x 2f(t)f^*(t) - (f^*)^2(t)dt$

$$= \int_0^x (2f(t) - f^*(t))^2 dt + 2 \left[t(f^*)^2(t) \right]_0^x$$

$$= \int_0^x (2f(t) - f^*(t))^2 dt + 2x(f^*)^2(x) \geq 0$$

d'où le résultat.

EXERCICE 2

PARTIE A - CAS OÙ P EST CONSTANT

- ① Soit $u \in E_a^{(0)}$. On a $b = u_1 - au_0$; donc, pour une suite donnée, il n'existe qu'un seul b .
- ② (a) Les éléments de $E_1^{(0)}$ vérifient par définition $u_{n+1} = u_n + b_u$ pour tout n . Ce sont donc les suites arithmétiques de raison b_u et on connaît leur expression pour tout n .

$$E_1^{(0)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = nb + u_0\}$$

- (b) Les éléments de $E_0^{(0)}$ vérifient par définition $u_{n+1} = b_u$ pour tout n . Ce sont donc les suites constantes à partir du rang 1.
- ③ $E_a^{(0)} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est stable par addition et par multiplication par tout réel, c'est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Ainsi $E_a^{(0)}$ est un espace vectoriel.
- ④ La suite constante égale à 1 est dans $E_a^{(0)}$ puisque $b = 1 - a$ convient. Il en va de même pour (y_n) car, pour tout n , $y_{n+1} = ay_n$ et on s'aperçoit que $b = 0$ convient.

Montrons maintenant que (x, y) est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\lambda x + \mu y = 0$. En particulierisant l'égalité précédente pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + a\mu = 0 \end{cases}$$

qui est de Cramer puisque son déterminant vaut $a - 1 \neq 0$ par hypothèse. Il admet donc comme seule solution $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. La famille (x, y) est donc libre.

En conclusion

$$(x, y) \text{ est libre ; } b_x = 1 - a \text{ et } b_y = 0$$

- ⑤ Soit $u \in E_a^{(0)}$.

- (a) D'après les définitions de x et y , on cherche donc à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda + a\mu = u_1 \end{cases}$$

dont on a vu à la question précédente qu'il est de Cramer ; donc

$$(\lambda, \mu) \text{ existe et est unique.}$$

- (b) Effectuons une récurrence afin de montrer que la proposition

$$\mathcal{P}(n) : u_n = \lambda x_n + \mu y_n$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{P}(0)$ est vraie d'après la question précédente et $\mathcal{P}(1)$ aussi. $-\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: supposons la propriété $\mathcal{P}$ vraie au rang n . Alors, d'après la définition de $u \in E_a^{(0)}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n + b_u \\ &= a(\lambda x_n + \mu y_n) + (\lambda b_x + \mu b_y) \\ &= \lambda(ax_n + b_x) + \mu(ay_n + b_y) \\ u_{n+1} &= \lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1} \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et, par suite,

$$u = \lambda x + \mu y$$

- (c) La question ⑤ dans son ensemble nous a donc permis de voir que la famille (x, y) est génératrice. Comme, par ailleurs, on sait aussi qu'elle est libre, voir ④, on peut finalement déduire de tout ceci que

$$(x, y) \text{ est une base de } E_a^{(0)}$$

- ⑥ (x, y) ayant deux éléments,

$E_a^{(0)}$ est de dimension 2.

Par ailleurs, la question précédente nous permet de dire

$$E_a^{(0)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda + \mu a^n\}$$

PARTIE B - CAS OÙ $a \neq 1$

- ⑦ Soit $u \in E_a^{(p)}$ et considérons deux polynômes Q et R de degré inférieur ou égal à p vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + Q(n) = au_n + R(n)$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n) = Q(n)$. Par conséquent, le polynôme $R - Q$, qui a une infinité de racines, est nul, si bien que $R = Q$. On a donc démontré l'unicité de P , ce qui justifie la notation P_u .

- ⑧ $E_a^{(p)} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est stable par addition et par multiplication par tout scalaire de façon immédiate, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- ⑨ On a pour tout n et pour tout $(u, v, \lambda) \in E_a(p)^2 \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n + P_u(n) \\ v_{n+1} &= av_n + P_v(n) \end{aligned}$$

d'où

$$(u + v)_{n+1} = a(u + v)_n + (P_u + P_v)(n)$$

Par suite

$$(\lambda u)_{n+1} = a(\lambda u)_n + (\lambda P_u)(n)$$

et donc

$$\theta(u + v) = \theta(u) + \theta(v)$$

D'où

$$\theta(\lambda u) = \lambda \theta(u)$$

Enfin θ est linéaire.

- ⑩ Soit $u \in \text{Ker } \theta$. Alors, pour tout entier n , on a $u_{n+1} = au_n$. Donc u est une suite géométrique de raison a . Réciproquement, toute suite géométrique de raison a est évidemment dans le noyau. On en conclut

$$\text{Ker } \theta = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda a^n\}$$

Notons que cet espace est de dimension 1 puisque la famille à un élément constituée de la suite (a^n) en est une base.

- ⑪ (a) Le terme de degré k a pour coefficient $1 - a$, qui est non nul par hypothèse sur a . Comme c'est le plus haut degré qu'on puisse obtenir en développant Q_k , on en déduit

$$\deg Q_k = k$$

- (b) D'après la question précédente, chaque Q_k est de degré k ; $(Q_0, \dots, Q_p)$ est donc une famille de polynômes à degrés échelonnés. D'après le cours, c'est donc une famille libre. Comme elle contient $p + 1$ éléments et que c'est précisément la dimension de $\mathbb{R}_p[\mathbb{X}]$, elle en est donc une base.

- ⑫ (a) On cherche une suite (u_n) vérifiant pour tout n

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n + [(n+1)^k - an^k] \\ u_{n+1} - (n+1)^k &= a(u_n - n^k) \end{aligned}$$

La suite (n^k) convient donc tout à fait puisque, dans ce cas, les deux membres de l'égalité à vérifier sont égaux à zéro pour tout n .

$$\theta((n^k)) = Q_k$$

- ⓑ D'après la question précédente, $(Q_0, \dots, Q_p)$ est dans l'image de θ ; or, d'après la question ⓐ, c'est une base de $\mathbb{R}_p[\mathbb{X}]$, donc

$$\mathbb{R}_p[\mathbb{X}] = \text{Vect}(Q_0, \dots, Q_p) \subset \text{Im } \theta$$

Par conséquent θ est surjective.

- 13 La question précédente nous a donné l'image de θ et la question ⓐ son noyau. Il ne reste maintenant plus qu'à écrire le théorème du rang pour obtenir

$$\begin{aligned} \dim E_a^{(p)} &= \text{rg } \theta + \dim \text{Ker } \theta = (p+1) + 1 = p+2 \\ \dim E_a^{(p)} &= p+2 \end{aligned}$$

- 14 D'après la question II.6.a, $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)})$ (notons qu'avec les notations de l'énoncé on a $x^{(0)} = x$) est l'image réciproque de la famille $(Q_0, \dots, Q_p)$ par l'application linéaire θ ; elle est donc une famille libre en tant qu'image réciproque d'une famille libre. Le vecteur y engendrant le noyau de θ (comme on l'a vu à la question II.4), si on avait

$$\exists (\lambda_0, \dots, \lambda_p) \quad y = \sum_{k=0}^{k=p} \lambda_k x^{(k)}$$

alors, en prenant l'image de cette relation par θ , on aurait

$$\sum_{k=0}^{k=p} \lambda_k Q_k = 0$$

si bien que d'après la liberté de $(Q_0, \dots, Q_p)$, il viendrait $(\lambda_0, \dots, \lambda_p) = 0$ et par suite $y = 0$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, $y \notin \text{Vect}(x^{(0)}, \dots, x^{(p)})$ et donc la famille $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y)$ est libre. Comme, par ailleurs, elle est de cardinal $p+2$, c'est-à-dire précisément la dimension de $E_a^{(p)}$ d'après la question ⓐ, on en conclut qu'elle est maximale, autrement dit

$$(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y) \text{ est une base de } E_a^{(p)}$$

- 15 u est dans $E_2^{(1)}$ et d'après ce qui précède, $((1), (n), (2^n))$ en est une base. Donc il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, unique, vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a2^n + b + cn$. Appliquée pour $n = 0, 1, 2$, cette relation fournit le système

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ 2a + b + c = 1 \\ 4a + b + 2c = 5 \end{cases}$$

dont on voit facilement que $(1, -3, 2)$ est la solution. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n - 3 + 2n$$

PARTIE C - CAS OÙ $a = 1$

- 16 Tout d'abord, les résultats des questions II. 1 à II. 4 sont inchangés. Pour la question II. 4 plus précisément, le noyau de θ est maintenant constitué des suites constantes (qui sont des suites géométriques de raison 1), c'est-à-dire $\mathbb{R}x$ pour reprendre les notations de la première partie. Concernant la question II.5, les polynômes Q_k sont à présent de degré $k-1$ puisque le coefficient de X^k s'annule mais que celui de X^{k-1} vaut $C_k^{k-1} = k \neq 0$ pour $k \neq 0$. En particulier, on a maintenant $Q_0 = 0$, si bien que $(Q_0, \dots, Q_p)$ n'est plus une base de $\mathbb{R}_p[\mathbb{X}]$ (elle contient 0). Pour avoir une famille de polynômes à degrés échelonnés, il suffit toutefois de prendre $\mathcal{Q} = (Q_1, \dots, Q_{p+1})$; c'est là la seule véritable différence avec la partie précédente. $\mathcal{Q}$ est encore une fois une base de $\mathbb{R}_p[\mathbb{X}]$ et est encore dans l'image de θ qui est donc encore surjective ($\mathcal{Q} = \theta(\mathcal{X})$ où $\mathcal{X} = (x^{(1)}, \dots, x^{(p+1)})$). Ainsi, $\dim E_1^{(p)} = p+2$ une fois de plus. Et enfin, pour les mêmes raisons que dans la partie précédente, $x \cup \mathcal{X}$, qui est la réunion d'une base $\text{Ker } \theta$ et de l'image réciproque d'une base de $\text{Im } \theta$, est une base de l'espace. On a donc montré que

$$(x, x^{(1)}, \dots, x^{(p+1)}) \text{ est une base de } E_1^{(p)}.$$

- ⑪ u est dans $E_1^{(1)}$ dont une base est $((1), (n), (n^2))$ comme on vient de l'établir. Donc il existe un triplet (a, b, c) , unique, vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a + bn + cn^2$$

Encore une fois on détermine (a, b, c) en résolvant le système 3×3 suivant

$$\begin{cases} a = -2 \\ a + b + c = -7 \\ a + 2b + 4c = -18 \end{cases}$$

dont la solution est $(-2, -2, -3)$. Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -2 - 2n - 3n^2$$