

DS 8 : Fiche de calculs

du 08/04/2026

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.

Nom et prénom :

Note :

Donner les réponses sur la feuille sans justification. Vous pouvez utiliser un brouillon.

Durée : 1 heure

ALGÈBRE LINÉAIRE

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (2x + y - z, x + y)$.

Matrice de f dans les bases canoniques :

Base du noyau de f :

Base de l'image de f :

On considère l'endomorphisme $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \mapsto (-x - 4y - 2z, 4x + 9y + 4z, -8x - 16y - 7z)$.

Expliquer comment montrer que s est une symétrie (ne pas faire les calculs explicitement) et donner ses espaces caractéristiques.

Soit l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto (X - 1)P'(X) + P(X + 1)$ de $\mathbb{R}_4[X]$.

Matrice de φ dans les bases canoniques :

Rang de φ :

Base du noyau de φ :Base de l'image de f :Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\text{Id} = 0$.Montrer que f est un isomorphisme, puis que $F := \ker(f - \text{Id})$ et $G := \ker(f - 2\text{Id})$ sont supplémentaires dans E .*On pourra utiliser le fait que $x = (f(x) - x) - (f(x) - 2x)$, pour tout $x \in E$.*

INTÉGRATION

Donner un équivalent simples des expressions suivantes

$$\sum_{k=1}^n \frac{k+2n}{k^3 - n^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$$

$$\sum_{k=1}^n k \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$$

Calculer les limites suivantes, en utilisant une majoration ou une minoration grossière d'une partie des intégrandes.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{t \, dt}{\ln(t)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{x^2} \frac{e^t \cos(t) \, dt}{t} =$$

Donner une expression simple des primitives suivantes.

$$\int \frac{x+1}{x^2+1} dx =$$

$$\int \cos(2 \ln(t)) \, dt$$

Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_{-1}^1 t^2 \sqrt{1-t^2} \, dt$$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dt}{\cos(t)}$$

DS 8

du 08/04/2026

Tout appareil connecté est interdit. Calculatrices interdites.
Faites attention au soin apporté à votre présentation et à la justesse de votre rédaction.
Durée : 3 heures.

EXERCICE 1: TRANSFORMÉE DE CESÀRO

La transformée de Cesàro d'une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction $f^* : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{définie par } f^* : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x > 0, \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

PARTIE A - EXEMPLES

- ① Prenons $f : x \mapsto \arctan x$. Calculer f^* puis donner les limites de f et f^* en $+\infty$.
- ② Prenons $f : x \mapsto x \sin(x^2)$. Calculer f^* puis donner sa limite en $+\infty$.
- ③ Considérons dans cette question $f : x \mapsto \sqrt{x} \sin x$.
 - (a) Montrer que f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.
 - (b) Montrer que $\frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, en utilisant une intégration par parties, puis une majoration dans l'intégrale restante.
 - (c) En déduire que f^* tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

PARTIE B - PROPRIÉTÉS DE f^*

Dorénavant, f est une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

- ④ Montrer que f^* est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis que f^* est continue en 0.
- ⑤ Supposons dans cette question que f admet une limite ℓ en $+\infty$.
 - (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$, suffisamment grand, tel que $\frac{1}{x} \int_A^x |f(x) - \ell| dx < \varepsilon \cdot \frac{x - A}{x}$.
 - (b) En déduire que f^* admet la même limite ℓ quand x tend vers $+\infty$. *On pensera à calculer $|f^*(x) - \ell|$.*
- ⑥ Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que si la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$, alors la courbe représentative de f^* admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera une équation en fonction de (α, β) .
- ⑦ Montrer que si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, alors f^* admet un développement limité à l'ordre n en 0 que l'on précisera.
- ⑧ (a) En effectuant un changement de variable, montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, que $f^*(x) = \int_0^1 f(xu) du$.
- (b) En déduire que si f est monotone sur $\mathbb{R}_+$, f^* est aussi monotone sur $\mathbb{R}_+$.
- ⑨ On suppose que f est périodique, de période $T > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

- (a) Avec des relations de Chasles, donner une expression plus simple de $f^*(x)$, en fonction de $\int_0^T f(t)dt$ et de $\left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$, où l'on rappelle que $\lfloor \cdot \rfloor$ représente la partie entière.
- (b) En déduire f^* admet une limite quand $x \rightarrow +\infty$, que l'on donnera en fonction de T et de $\int_0^T f(t)dt$.

PARTIE C - INÉGALITÉ DE HARDY

Pour toute fonction g et tout réel x , on note $g^2(x)$ le produit de $g(x)$ avec lui-même. On veut montrer le résultat

$$\text{Soit } f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue. Pour tout } x > 0, \quad \int_0^x (f^*)^2(t)dt \leq 4 \int_0^x f^2(t)dt .$$

- (10) Justifier que la fonction $x \mapsto x(f^*(x))^2$ est prolongeable par continuité en 0. Est-elle dérivable en 0 ?
- (11) Trouver une primitive de $x \mapsto 2f(x)f^*(x) - (f^*)^2(x)$.
- (12) En réécrivant $\int_0^x (4f^2(t) - (f^*)^2(t))dt$ en utilisant la fonction dans la question (11), montrer l'inégalité de Hardy.

EXERCICE 2

Dans tout ce problème, a désigne un réel.

On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + P(n) \text{ où } P \text{ est un polynôme.}$$

Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est noté indifféremment $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou u .

La partie I étudie le cas où P est constant.

La partie II étudie le cas où $a \neq 1$.

PARTIE A - CAS OÙ P EST CONSTANT

Dans cette partie, on pose $E_a^{(0)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b\}$.

- (1) Soit $u \in E_a^{(0)}$. Il existe donc b réel tel que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = au_n + b$.
Montrer l'unicité de b . On notera $b = b_u$ pour $u \in E_a^{(0)}$.

- (2) (a) Déterminer $E_1^{(0)}$.

- (b) Déterminer $E_0^{(0)}$.

Dans le reste de cette partie, on suppose que $a \neq 1$.

- (3) Montrer que $E_a^{(0)}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Soit x la suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 1$, et soit y la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $y_n = a^n$.

- (4) Montrer que (x, y) est une famille libre de $E_a^{(0)}$. On précisera les valeurs de b pour chacune des suites.
- (5) Soit $u \in E_a^{(0)}$.

- (a) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que

$$\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases}$$

- (b) Montrer que, pour λ et μ définis à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda x_n + \mu y_n$$

(c) Que peut-on en conclure ?

(6) Déterminer $E_a^{(0)}$. On donnera en particulier la dimension de $E_a^{(0)}$.

PARTIE B - CAS où $a \neq 1$

Dans cette partie, on suppose que $a \neq 1$.

On fixe un entier naturel p . On note $\mathbb{R}_p[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p .

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. On pose

$$E_a^{(p)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists P \in \mathbb{R}_p[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)\}.$$

(7) Montrer l'unicité de P (on pourra étudier l'application φ de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$ définie par : $\varphi(P) = (P(0), P(1), \dots, P(p))$).
On notera $P = P_u$ pour $u \in E_a^{(p)}$.

(8) Montrer que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

(9) Montrer que l'application θ définie sur $E_a^{(p)}$ par $\theta(u) = P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.

(10) Déterminer le noyau de θ .

(11) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.

(a) Quel est le degré de Q_k ?

(b) Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, \dots, Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

(12) (a) Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, p\}$, Q_k est dans l'image de θ , notée $\text{Im } \theta$.

(b) Que peut-on en conclure ?

(13) Dédurre des questions précédentes la dimension de $E_a^{(p)}$.

(14) Pour $k \in \{0, 1, \dots, p\}$, on pose $x^{(k)}$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $x_n^{(k)} = n^k$. On rappelle que y est la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $y_n = a^n$. Montrer que $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.

(15) **Application.** Déterminer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7 \\ & u_0 = -2 \end{cases}$$

PARTIE C - CAS où $a = 1$

Faites cette partie seulement si tout le reste a été fait.

Dans cette partie, on suppose que $a = 1$.

(16) En adaptant les résultats obtenus à la partie précédente, déterminer :

$$E_1^{(p)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists P \in \mathbb{R}_p[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + P(n)\}$$

(17) **Application.** déterminer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = u_n - 6n + 1 \\ & u_0 = -2 \end{cases}$$