

INTERROGATION 4

Codez ci-contre, chiffre par chiffre, votre numéro élève, qui est votre place dans l'ordre alphabétique en base 7, puis donnez vos noms et prénoms ci-dessous.

☒ 0 ☒ 0

☐ 1 ☐ 1

☐ 2 ☐ 2

☐ 3 ☐ 3

☐ 4 ☐ 4

☐ 5 ☐ 5

☐ 6 ☐ 6

NOM - Prénom :

DURÉE : 120 MINUTES

QCM négatif à réponses multiples : 1 à 3 bonnes réponses. Bonne = 1pt,

Mauvaise = -1/2pt. Total ramené sur 3.

QCM une bonne réponse. Une seule bonne réponse qui rapporte 1 point (0 si plusieurs cases sont cochées).

Vrai ou faux. Cochez les affirmations vraies : 1/4 point par bonne réponse.

① **QCM négatif.** Soit $] - \infty, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f :] - \infty, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle.

- ☒ Si f est croissante sur $] - \infty, b[$, alors, pour tout $a \in] - \infty, b[$, $f(a) \leq f(b)$.
☐ Supposons $b > 0$. Si $f(0) \leq f(b)$, alors f est croissante.
☒ Si f est croissante et minorée, alors f admet une limite finie en $-\infty$.
☒ Si f est bijective, alors il existe une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $] - \infty, b[$, telle que $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.
☐ Si f est décroissante et minorée, alors f admet une limite finie en $-\infty$.
☐ Si la fonction f est monotone sur $[a, b]$, alors elle est bijective. ☐ Aucune des autres réponses

② **QCM négatif.** Soit $f : x \mapsto (x^2 + 1)^x$. Cocher si l'assertion est vraie.

$$f'(x) = \left(\ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1} \right) (x^2 + 1)^x$$

- ☐ L'ensemble de dérivabilité de f est $\mathbb{R}_+^*$. ☒ $f'(0) = 0$ ☒ $\lim_{-\infty} f = 0$
☐ f est paire. ☐ f est impaire. ☐ L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.
☒ $\lim_{+\infty} f = +\infty$ ☐ Aucune des autres réponses

③ **Question ouverte.** Faites l'étude complète de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + 7}{x - 3}$.

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. f est dérivable sur D_f et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2x(x-3) - x^2 - 7}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x - 7}{(x-3)^2} = \frac{(x-7)(x+1)}{(x-3)^2}$$

x	$-\infty$	-1	3	7	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	-2	$-\infty$	14	$+\infty$	$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = 3$

Donc f admet une asymptote verticale $x=3$ et une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ d'équation $y = x + 3$

- ④ Question ouverte. Démontrer que $\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$

Ne pas compléter ☐ 0 ☐ 0,5 ☐ 1 ☐ 1,5 ☐ 2 ☐ 2,5 ☐ 3 ☐ 3,5 ☐ 4 ☐ 4,5 ☐ 5

Par croissance de $\ln, \forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} \Leftrightarrow x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 < (x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Etude de $f: t \rightarrow \ln(1+t) - t$.

$\forall t > -1, f'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = -\frac{t}{1+t}$

x	-1	0	$+\infty$
$f(x)$		+	-

D'où, $\forall t > 1, \ln(1+t) \geq t$

$\Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$

or $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = -\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$

D'où $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \ln\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) < -\frac{1}{x+1}$

Donc il suffit de montrer que $\ln(1+t) < t$ pour $t > -1$

- ⑤ Question ouverte. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

Ne pas compléter ☐ 0 ☐ 0,5 ☐ 1 ☐ 1,5 ☐ 2 ☐ 2,5 ☐ 3 ☐ 3,5 ☐ 4 ☐ 4,5 ☐ 5

$e^x \geq \frac{x^0}{0!} = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Supposons alors que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé,

$$e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

Posons alors $f_n: x \mapsto e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, f_n'(x) = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = f_n(x)$

H.R.

$f_n'(x) = f_n(x)$

Donc f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(0) = 1 - 1 = 0$

D'où, $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) \geq 0$.

Donc, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

Soit $f: x \mapsto x \exp\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right)$.

- ⑥ QCM une bonne réponse. $D_f = \dots \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

☐ $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

☒ Aucune des autres réponses.

☐ $\mathbb{R}$

☐ $\mathbb{R}_+$

- ⑦ QCM une bonne réponse. $\lim_{+\infty} f = \dots +\infty$

☐ 0

☒ $+\infty$

☐ $-\infty$

- ⑧ QCM une bonne réponse. $\lim_{0+} f = \dots 0$

☒ 0

☐ $+\infty$

☐ $-\infty$

- ⑨ QCM une bonne réponse. $\lim_{1^+} f = \dots$

☐ 0 ☐ $-\infty$ ☒ $+\infty$

- ⑩ QCM une bonne réponse. Pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \dots$

☐ $\left(1 + \frac{2x}{x^2 - 1}\right) e^{\frac{2x}{x^2 - 1}}$ ☐ $\frac{x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1}{(x^2 - 1)^2} e^{\frac{2x}{x^2 - 1}}$ ☐ $e^{\frac{2x}{x^2 - 1}}$
☒ $\frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{(x^2 - 1)^2} e^{\frac{2x}{x^2 - 1}}$ ☐ Aucune des autres formules.

Soit $F : x \mapsto \frac{x^5 - x^3 + 6x^2 - 4x + 2}{(x - 1)^2 (x^2 + 1)}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. On note P la partie entière de F .

- ⑪ QCM une bonne réponse. $P(x) = \dots$

☐ Aucune des autres réponses. ☒ $x + 2$ ☐ 0 ☐ $x - 2$ ☐ x

- ⑫ QCM une bonne réponse. Il existe des réels a, b, c, d tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $F(x) = \dots$

☒ $P(x) + \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x - 1)^2} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$ ☐ $\frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x - 1)^2} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$
☐ Aucune des autres réponses. ☐ $\frac{a}{(x - 1)^2} + \frac{b}{x^2 + 1}$
☐ $P(x) + \frac{a}{(x - 1)^2} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$ ☐ $\frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x - 1)^2} + \frac{c}{x^2 + 1}$
☐ $P(x) + \frac{a}{(x - 1)^2} + \frac{b}{x^2 + 1}$

- ⑬ QCM une bonne réponse. Dans la décomposition en éléments simples de F , le coefficient de $\frac{1}{(x - 1)^2}$ vaut ...

☐ Aucune des autres réponses. ☐ 1 ☐ 4 ☒ 2 ☐ -2
☐ Non concerné.

- ⑭ QCM une bonne réponse. Dans la décomposition en éléments simples de F , le coefficient de $\frac{1}{x - 1}$ vaut ...

☐ -3 ☐ 1 ☐ 5 ☒ 3 ☐ 0 ☐ Non concerné.
☐ Aucune des autres réponses.

- ⑮ QCM une bonne réponse. Dans la décomposition en éléments simples de F , le terme de dénominateur $x^2 + 1$ est ...

☐ $\frac{2x - 1}{x^2 + 1}$ ☒ $\frac{1 - 2x}{x^2 + 1}$ ☐ Non concerné. ☐ $\frac{1}{x^2 + 1}$
☐ Aucune des autres réponses. ☐ $\frac{x + 2}{x^2 + 1}$

- ⑯ QCM une bonne réponse. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x - 1)^2}$ sur $]1, +\infty[$ est $x \mapsto \dots$

☐ $-\frac{2}{(x - 1)^3}$ ☐ Non concerné. ☒ $-\frac{1}{x - 1}$ ☐ Aucune des autres réponses.
☐ $-\frac{1}{3(x - 1)^3}$ ☐ $\ln((x - 1)^2)$ ☐ $\frac{1}{x - 1}$

17 QCM une bonne réponse. Une primitive de $x \mapsto \frac{3x-4}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dots$

- ☒ $\frac{3}{2} \ln(x^2+1) - 4 \arctan x$
☐ $3 \ln(x^2+1) - 2 \arctan x$
☐ Aucune des autres réponses.
- ☐ $(3x-4) \arctan x$
☐ $\frac{3}{2} \ln(x^2+1) - 2 \arctan x$
☐ $3 \ln(x^2+1) - 4 \arctan x$

18 QCM négatif. On pose $I = \int_0^1 x e^x dx$. $= [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e-1) = 1$

- ☐ $I = e - 1$.
 ☐ En posant $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, on obtient $I = [x e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$.
- ☒ En posant $u(x) = e^x$ et $v'(x) = x$, on obtient $I = \left[\frac{x^2}{2} e^x \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^x dx$.
 ☐ $I = 1 - e$.
- ☒ $x \mapsto (x-1)e^x$ est une primitive de $x \mapsto x e^x$ sur $\mathbb{R}$.
 ☐ $I = 2e - 1$.
- ☐ $x \mapsto (x+1)e^x$ est une primitive de $x \mapsto x e^x$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $x \mapsto \frac{x^2}{2} e^x$ est une primitive de $x \mapsto x e^x$ sur $\mathbb{R}$.
- ☒ En posant $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, on obtient $I = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$.
- ☐ Aucune des autres réponses

19 QCM négatif. On pose $J = \int_1^e x \ln x dx$.

- ☐ En posant $u(x) = x$ et $v'(x) = \ln x$, on peut prendre $v(x) = \frac{1}{x}$.
 ☒ $J = \frac{e^2+1}{4}$.
- ☐ $J = \frac{e^2-1}{4}$.
 ☐ $\left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e = \frac{e^2-1}{2}$.
- ☒ En posant $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$, on obtient $J = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx$.
- ☐ En posant $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$, on obtient $J = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 dx$.
- ☒ $x \mapsto \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$ est une primitive de $x \mapsto x \ln x$ sur $]0, +\infty[$.
- ☐ $x \mapsto \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x \ln x$ sur $]0, +\infty[$.
 ☐ $J = \frac{e^2}{4}$.
- ☐ Aucune des autres réponses

20 Vrai ou faux. On pose $K = \int_0^1 \arctan x dx$. $= [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$

- ☒ $K = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.
- ☐ En posant $u(x) = \arctan x$ et $v'(x) = 1$, on obtient $K = [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.
- ☐ $K = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$.
- ☒ En posant $u(x) = \arctan x$ et $v'(x) = 1$, on obtient $K = [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$.
- ☐ $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \ln 2$.
 ☐ $K = \frac{\pi}{4} - \ln 2$.
 ☒ $K = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}$.
 petit piège...
- ☐ On ne peut pas calculer K par intégration par parties, car l'intégrande n'est pas un produit.
- ☒ $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\ln 2}{2}$.

21 **Vrai ou faux.** On pose $L = \int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$.
$$= \left[x^2 \times (-\cos(x)) \right]_0^\pi - \left[2x (-\sin(x)) \right]_0^\pi + \left[2 \cos(x) \right]_0^\pi - 0$$
$$= \pi^2 + 0 - (0 - 0) + (-2) - 2 = \pi^2 - 4$$

☐ En posant $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \sin x$, on obtient $L = [x^2 \cos x]_0^\pi - 2 \int_0^\pi x \cos x \, dx$.

☐ $\int_0^\pi x \cos x \, dx = 0$. ☐ $L = \pi^2 + 4$.

☒ En posant $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \sin x$, on obtient $L = [-x^2 \cos x]_0^\pi + 2 \int_0^\pi x \cos x \, dx$.

☒ $L = \pi^2 - 4$. ☒ En posant $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = x^2$, on obtient $L = -\frac{1}{3} \int_0^\pi x^3 \cos x \, dx$.

☐ $\int_0^\pi x \cos x \, dx = -2$.

☐ En posant $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \sin x$, on obtient $L = [-x^2 \cos x]_0^\pi - 2 \int_0^\pi x \cos x \, dx$.

☒ $L > 0$. ☐ $L = \pi^2$.

22 **Vrai ou faux.** On pose $M = \int_0^\pi e^x \sin x \, dx$ et $N = \int_0^\pi e^x \cos x \, dx$.

☒ $M = \frac{e^\pi + 1}{2}$. ☐ En posant $u(x) = \cos x$ et $v'(x) = e^x$, on obtient $N = e^\pi + 1 + M$.

☐ Deux intégrations par parties successives conduisent nécessairement à l'égalité $M = M$: on ne peut pas calculer M a

☐ $M = \frac{1 - e^\pi}{2}$. ☒ En posant $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = e^x$, on obtient $M = -N$.

☒ En posant $u(x) = \cos x$ et $v'(x) = e^x$, on obtient $N = -e^\pi - 1 + M$. ☐ $M = \frac{e^\pi - 1}{2}$.

☐ En posant $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = e^x$, on obtient $M = N$.

☒ En posant $u(x) = e^x$ et $v'(x) = \cos x$, on obtient $N = -M$.

23 **Vrai ou faux.** Primitives obtenues par intégration par parties.

☐ $x \mapsto (x^2 - 2x)e^x$ est une primitive de $x \mapsto x^2 e^x$ sur $\mathbb{R}$.

☐ $x \mapsto x \ln x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0, +\infty[$.

☒ $x \mapsto \sin x - x \cos x$ est une primitive de $x \mapsto x \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

☒ $x \mapsto x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ est une primitive de $\arcsin$ sur $] -1, 1[$.

☐ $x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^x$ est une primitive de $x \mapsto x^2 e^x$ sur $\mathbb{R}$.

☒ $x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0, +\infty[$.

☐ $x \mapsto x \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$ est une primitive de $\arcsin$ sur $] -1, 1[$.

☐ $x \mapsto -x \cos x$ est une primitive de $x \mapsto x \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

☒ $x \mapsto (x^2 - 2x + 2)e^x$ est une primitive de $x \mapsto x^2 e^x$ sur $\mathbb{R}$.

24 **Vrai ou faux.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \, dx$.

☐ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = n T_n - \frac{1}{e}$. ☐ $T_1 = \frac{2}{e} - 1$.

☐ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = \frac{1}{e} - (n+1) T_n$. ☐ La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

☒ $T_2 = 2 - \frac{5}{e}$. ☐ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = (n+1) T_n + \frac{1}{e}$.

☒ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq T_n \leq \frac{1}{n+1}$. ☒ $T_1 = 1 - \frac{2}{e}$.

☒ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = (n+1) T_n - \frac{1}{e}$. ☒ $T_0 = 1 - \frac{1}{e}$.

25 **Question ouverte.** Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{2 - \cos^2(t)} dt$, en effectuant le changement de variable $x = \sin t$.

Ne pas compléter ☐ 0 ☐ 1

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{2 - \cos^2(t)} dt = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$



- 26 Question ouverte. Calculer $\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$, en effectuant le changement de variable $x = \sqrt{t}$.

Ne pas compléter ☐ 0 ☐ 1

$$\int_1^2 \frac{2 \ln(\sqrt{t}^2)}{2 \sqrt{t}} dt = \int_1^{\sqrt{2}} 2 \ln(x^2) dx = 4 \int_1^{\sqrt{2}} \ln(x) dx = 4 \left[x \ln(x) - x \right]_1^{\sqrt{2}} \\ = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \ln(2) + 1 - \sqrt{2} \right)$$

- 27 Question ouverte. Calculer $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t)) dt$, en effectuant le changement de variable $x = \ln t$, puis IPP.

Ne pas compléter ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2

$$\int_1^{e^\pi} t \sin(\ln(t)) \frac{dt}{t} = \int_0^\pi e^x \sin(x) dx = \left[e^x \sin x \right]_0^\pi - \left[e^x \cos x \right]_0^\pi$$

$$+ \int_0^\pi e^x (-\sin x) dx \\ \text{D'où} \quad \int_0^\pi e^x \sin(x) dx = \frac{1}{2} (e^\pi + 1)$$