



INTERROGATION 4

Codez ci-contre, chiffre par chiffre, votre numéro élève, qui est votre place dans l'ordre alphabétique en base 7, puis donnez vos noms et prénoms ci-dessous.

☐0 ☐0☐1 ☐1☐2 ☐2☐3 ☐3☐4 ☐4☐5 ☐5☐6 ☐6

NOM - Prénom :

DURÉE : 120 MINUTES

QCM négatif à réponses multiples : 1 à 3 bonnes réponses. Bonne = 1pt,

Mauvaise = -1/2pt. Total ramené sur 3.

QCM une bonne réponse. Une seule bonne réponse qui rapporte 1 point (0 si plusieurs cases sont cochées).

Vrai ou faux. Cochez les affirmations vraies : 1/4 point par bonne réponse.

① **QCM négatif.** Soit $] - \infty, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f :] - \infty, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle.

☐ Si f est croissante sur $] - \infty, b[$, alors, pour tout $a \in] - \infty, b[$, $f(a) \leq f(b)$.

☐ Supposons $b > 0$. Si $f(0) \leq f(b)$, alors f est croissante.

☐ Si f est croissante et minorée, alors f admet une limite finie en $-\infty$.

☐ Si f est bijective, alors il existe une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $] - \infty, b[$, telle que $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

☐ Si f est décroissante et minorée, alors f admet une limite finie en $-\infty$.

☐ Si la fonction f est monotone sur $[a, b]$, alors elle est bijective. ☐ Aucune des autres réponses

② **QCM négatif.** Soit $f : x \mapsto (x^2 + 1)^x$. Cocher si l'assertion est vraie.

☐ L'ensemble de dérivabilité de f est $\mathbb{R}_+^*$. ☐ $f'(0) = 0$ ☐ $\lim_{-\infty} f = 0$

☐ f est paire. ☐ f est impaire. ☐ L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.

☐ $\lim_{+\infty} f = +\infty$ ☐ Aucune des autres réponses

③ **Question ouverte.** Faites l'étude complète de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + 7}{x - 3}$.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4



- ④ **Question ouverte.** Démontrer que $\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$

Ne pas compléter ☐ 0 ☐ 0,5 ☐ 1 ☐ 1,5 ☐ 2 ☐ 2,5 ☐ 3 ☐ 3,5 ☐ 4 ☐ 4,5 ☐ 5

- ⑤ **Question ouverte.** Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

Ne pas compléter ☐ 0 ☐ 0,5 ☐ 1 ☐ 1,5 ☐ 2 ☐ 2,5 ☐ 3 ☐ 3,5 ☐ 4 ☐ 4,5 ☐ 5

Soit $f : x \mapsto x \exp\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right)$.

- ⑥ **QCM une bonne réponse.** $D_f = \dots$

☐ $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

☐ Aucune des autres réponses.

☐ $\mathbb{R}$

☐ $\mathbb{R}_+^*$

- ⑦ **QCM une bonne réponse.** $\lim_{+\infty} f = \dots$

☐ 0

☐ $+\infty$

☐ $-\infty$

- ⑧ **QCM une bonne réponse.** $\lim_{0^+} f = \dots$

☐ 0

☐ $+\infty$

☐ $-\infty$

- ⑨ QCM une bonne réponse. $\lim_{1^+} f = \dots$

☐ 0 ☐ $-\infty$ ☐ $+\infty$

- ⑩ QCM une bonne réponse. Pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \dots$

☐ $\left(1 + \frac{2x}{x^2 - 1}\right) e^{\frac{2x}{x^2 - 1}}$ ☐ $\frac{x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1}{(x^2 - 1)^2} e^{\frac{2x}{x^2 - 1}}$ ☐ $e^{\frac{2x}{x^2 - 1}}$
☐ $\frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{(x^2 - 1)^2} e^{\frac{2x}{x^2 - 1}}$ ☐ Aucune des autres formules.

Soit $F : x \mapsto \frac{x^5 - x^3 + 6x^2 - 4x + 2}{(x - 1)^2 (x^2 + 1)}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. On note P la partie entière de F .

- ⑪ QCM une bonne réponse. $P(x) = \dots$

☐ Aucune des autres réponses. ☐ $x + 2$ ☐ 0 ☐ $x - 2$ ☐ x

- ⑫ QCM une bonne réponse. Il existe des réels a, b, c, d tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $F(x) = \dots$

☐ $P(x) + \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x - 1)^2} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$ ☐ $\frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x - 1)^2} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$
☐ Aucune des autres réponses. ☐ $\frac{a}{(x - 1)^2} + \frac{b}{x^2 + 1}$
☐ $P(x) + \frac{a}{(x - 1)^2} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$ ☐ $\frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x - 1)^2} + \frac{c}{x^2 + 1}$
☐ $P(x) + \frac{a}{(x - 1)^2} + \frac{b}{x^2 + 1}$

- ⑬ QCM une bonne réponse. Dans la décomposition en éléments simples de F , le coefficient de $\frac{1}{(x - 1)^2}$ vaut ...

☐ Aucune des autres réponses. ☐ 1 ☐ 4 ☐ 2 ☐ -2
☐ Non concerné.

- ⑭ QCM une bonne réponse. Dans la décomposition en éléments simples de F , le coefficient de $\frac{1}{x - 1}$ vaut ...

☐ -3 ☐ 1 ☐ 5 ☐ 3 ☐ 0 ☐ Non concerné.
☐ Aucune des autres réponses.

- ⑮ QCM une bonne réponse. Dans la décomposition en éléments simples de F , le terme de dénominateur $x^2 + 1$ est ...

☐ $\frac{2x - 1}{x^2 + 1}$ ☐ $\frac{1 - 2x}{x^2 + 1}$ ☐ Non concerné. ☐ $\frac{1}{x^2 + 1}$
☐ Aucune des autres réponses. ☐ $\frac{x + 2}{x^2 + 1}$

- ⑯ QCM une bonne réponse. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x - 1)^2}$ sur $]1, +\infty[$ est $x \mapsto \dots$

☐ $-\frac{2}{(x - 1)^3}$ ☐ Non concerné. ☐ $-\frac{1}{x - 1}$ ☐ Aucune des autres réponses.
☐ $-\frac{1}{3(x - 1)^3}$ ☐ $\ln((x - 1)^2)$ ☐ $\frac{1}{x - 1}$

17 **QCM une bonne réponse.** Une primitive de $x \mapsto \frac{3x-4}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dots$

- ☐ $3 \ln(x^2+1) - 2 \arctan x$
☐ Aucune des autres réponses.
☐ $\frac{3}{2} \ln(x^2+1) - 4 \arctan x$
☐ $(3x-4) \arctan x$
☐ $\frac{3}{2} \ln(x^2+1) - 2 \arctan x$
☐ $3 \ln(x^2+1) - 4 \arctan x$

18 **QCM négatif.** On pose $I = \int_0^1 x e^x dx$.

- ☐ $I = e - 1$.
 ☐ En posant $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, on obtient $I = [x e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$.
☐ En posant $u(x) = e^x$ et $v'(x) = x$, on obtient $I = \left[\frac{x^2}{2} e^x \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^x dx$.
 ☐ $I = 1 - e$.
☐ $x \mapsto (x-1) e^x$ est une primitive de $x \mapsto x e^x$ sur $\mathbb{R}$.
 ☐ $I = 2e - 1$.
☐ $x \mapsto (x+1) e^x$ est une primitive de $x \mapsto x e^x$ sur $\mathbb{R}$.
☐ $x \mapsto \frac{x^2}{2} e^x$ est une primitive de $x \mapsto x e^x$ sur $\mathbb{R}$.
☐ En posant $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, on obtient $I = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$.
☐ Aucune des autres réponses

19 **QCM négatif.** On pose $J = \int_1^e x \ln x dx$.

- ☐ En posant $u(x) = x$ et $v'(x) = \ln x$, on peut prendre $v(x) = \frac{1}{x}$.
 ☐ $J = \frac{e^2 + 1}{4}$.
☐ $J = \frac{e^2 - 1}{4}$.
 ☐ $\left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e = \frac{e^2 - 1}{2}$.
☐ En posant $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$, on obtient $J = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx$.
☐ En posant $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$, on obtient $J = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 dx$.
☐ $x \mapsto \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$ est une primitive de $x \mapsto x \ln x$ sur $]0, +\infty[$.
☐ $x \mapsto \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x \ln x$ sur $]0, +\infty[$.
 ☐ $J = \frac{e^2}{4}$.
☐ Aucune des autres réponses

20 **Vrai ou faux.** On pose $K = \int_0^1 \arctan x dx$.

- ☐ $K = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.
☐ En posant $u(x) = \arctan x$ et $v'(x) = 1$, on obtient $K = [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.
☐ $K = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$.
☐ En posant $u(x) = \arctan x$ et $v'(x) = 1$, on obtient $K = [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$.
☐ $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \ln 2$.
 ☐ $K = \frac{\pi}{4} - \ln 2$.
 ☐ $K = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}$.
☐ On ne peut pas calculer K par intégration par parties, car l'intégrande n'est pas un produit.
☐ $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\ln 2}{2}$.



21 **Vrai ou faux.** On pose $L = \int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$.

- ☐ En posant $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \sin x$, on obtient $L = [x^2 \cos x]_0^\pi - 2 \int_0^\pi x \cos x \, dx$.
- ☐ $\int_0^\pi x \cos x \, dx = 0$. ☐ $L = \pi^2 + 4$.
- ☐ En posant $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \sin x$, on obtient $L = [-x^2 \cos x]_0^\pi + 2 \int_0^\pi x \cos x \, dx$.
- ☐ $L = \pi^2 - 4$. ☐ En posant $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = x^2$, on obtient $L = -\frac{1}{3} \int_0^\pi x^3 \cos x \, dx$.
- ☐ $\int_0^\pi x \cos x \, dx = -2$.
- ☐ En posant $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \sin x$, on obtient $L = [-x^2 \cos x]_0^\pi - 2 \int_0^\pi x \cos x \, dx$.
- ☐ $L > 0$. ☐ $L = \pi^2$.

22 **Vrai ou faux.** On pose $M = \int_0^\pi e^x \sin x \, dx$ et $N = \int_0^\pi e^x \cos x \, dx$.

- ☐ $M = \frac{e^\pi + 1}{2}$. ☐ En posant $u(x) = \cos x$ et $v'(x) = e^x$, on obtient $N = e^\pi + 1 + M$.
- ☐ Deux intégrations par parties successives conduisent nécessairement à l'égalité $M = M$: on ne peut pas calculer M a
- ☐ $M = \frac{1 - e^\pi}{2}$. ☐ En posant $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = e^x$, on obtient $M = -N$.
- ☐ En posant $u(x) = \cos x$ et $v'(x) = e^x$, on obtient $N = -e^\pi - 1 + M$. ☐ $M = \frac{e^\pi - 1}{2}$.
- ☐ En posant $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = e^x$, on obtient $M = N$.
- ☐ En posant $u(x) = e^x$ et $v'(x) = \cos x$, on obtient $N = -M$.

23 **Vrai ou faux.** Primitives obtenues par intégration par parties.

- ☐ $x \mapsto (x^2 - 2x)e^x$ est une primitive de $x \mapsto x^2 e^x$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $x \mapsto x \ln x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0, +\infty[$.
- ☐ $x \mapsto \sin x - x \cos x$ est une primitive de $x \mapsto x \sin x$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $x \mapsto x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ est une primitive de $\arcsin$ sur $] -1, 1[$.
- ☐ $x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^x$ est une primitive de $x \mapsto x^2 e^x$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0, +\infty[$.
- ☐ $x \mapsto x \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$ est une primitive de $\arcsin$ sur $] -1, 1[$.
- ☐ $x \mapsto -x \cos x$ est une primitive de $x \mapsto x \sin x$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $x \mapsto (x^2 - 2x + 2)e^x$ est une primitive de $x \mapsto x^2 e^x$ sur $\mathbb{R}$.

24 **Vrai ou faux.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \, dx$.

- ☐ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = n T_n - \frac{1}{e}$. ☐ $T_1 = \frac{2}{e} - 1$.
- ☐ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = \frac{1}{e} - (n+1) T_n$. ☐ La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- ☐ $T_2 = 2 - \frac{5}{e}$. ☐ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = (n+1) T_n + \frac{1}{e}$.
- ☐ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq T_n \leq \frac{1}{n+1}$. ☐ $T_1 = 1 - \frac{2}{e}$.
- ☐ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = (n+1) T_n - \frac{1}{e}$. ☐ $T_0 = 1 - \frac{1}{e}$.

25 **Question ouverte.** Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{2 - \cos^2(t)} dt$, en effectuant le changement de variable $x = \sin t$.

Ne pas compléter ☐0 ☐1



26 Question ouverte. Calculer $\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$, en effectuant le changement de variable $x = \sqrt{t}$.

Ne pas compléter ☐ 0 ☐ 1

27 Question ouverte. Calculer $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t))dt$, en effectuant le changement de variable $x = \ln t$, puis IPP.

Ne pas compléter ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2